

ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ПО ОБРАЗОВАНИЮ
ГОСУДАРСТВЕННОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО
ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
КУЗБАССКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

На правах рукописи

УДК 539.3

Петрушева Ирина Ивановна

НЕКОТОРЫЕ ЗАДАЧИ О СВОБОДНЫХ КОЛЕБАНИЯХ
И ДИНАМИЧЕСКОЙ УСТОЙЧИВОСТИ УПРУГИХ
МНОГОСЛОЙНЫХ КОМПОЗИТНЫХ ОБОЛОЧЕК
ВРАЩЕНИЯ

01.02.04 — механика деформируемого твердого тела

Научный руководитель:
доктор физико-математических наук,
профессор А. Н. Андреев

Диссертация
на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Кемерово — 2007

СОДЕРЖАНИЕ

| | |
|---|-----------|
| ВВЕДЕНИЕ | 1 |
| Цель диссертационной работы | 19 |
| Научная новизна..... | 19 |
| Практическая ценность работы | 20 |
| Достоверность результатов | 20 |
| Апробация работы..... | 20 |
| Публикации..... | 21 |
| Структура и объем | 21 |
| Содержание работы | 21 |
| ГЛАВА 1. ДИНАМИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ ТЕОРИИ МНОГОСЛОЙНЫХ КОМПОЗИТНЫХ ОБОЛОЧЕК ВРАЩЕНИЯ И ИХ ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ | 23 |
| 1.1. Модель армированного слоя..... | 23 |
| 1.2. Неклассические нелинейные уравнения динамики многослойных оболочек вращения в системе координат, определяемой линиями главных кривизн..... | 28 |
| 1.2.1. Уравнения свободных колебаний | 34 |
| 1.2.2. Уравнения свободных колебаний оболочек вращения... | 37 |
| 1.2.3. Уравнения динамической устойчивости | 40 |
| 1.3. Численное интегрирование краевых задач методом инвариантного погружения | 45 |
| 1.3.1. Метод инвариантного погружения | 46 |
| 1.4. Численное интегрирование задачи о свободных колебаниях многослойных оболочек вращения | 50 |

| | |
|--|-----------|
| 1.5. Геометрические характеристики некоторых канонических координатных систем | 56 |
| ГЛАВА 2. СВОБОДНЫЕ КОЛЕБАНИЯ МНОГОСЛОЙНОЙ КОМПОЗИТНОЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ..... | 58 |
| 2.1. Постановка и решение задачи | 58 |
| 2.2. Параметрический анализ собственных частот и собственных форм цилиндрической оболочки | 67 |
| 2.2.1. Скорость сходимости численного расчета собственных частот относительно количества функций, используемых при аппроксимации решения | 67 |
| 2.2.2. Собственные формы колебаний как функции параметра волнообразования | 70 |
| 2.2.3. Влияние параметра волнообразования на значения собственных частот. Оценка значимости поперечных сдвигов | 73 |
| 2.2.4. Влияние геометрических параметров оболочки на значения собственных частот. Оценка значимости поперечных сдвиговых деформаций | 74 |
| 2.2.4.1. Варьирование относительной толщины оболочки | 74 |
| 2.2.4.2. Варьирование относительной длины оболочки | 76 |
| 2.2.5. Влияние жесткостных характеристик пакета на значения собственных частот. Оценка значимости поперечных сдвиговых деформаций | 79 |
| 2.2.5.1. Варьирование интенсивности армирования слоев композита при неизменных параметрах его компонен | 79 |

| | |
|--|-----------|
| 2.2.5.2. Варьирование относительной жесткости слоев трехслойного симметричного изотропного пакета..... | 93 |
| ГЛАВА 3. СВОБОДНЫЕ КОЛЕБАНИЯ УСЕЧЕННОЙ МНОГОСЛОЙНОЙ КОНИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ..... | 94 |
| 3.1. Постановка и решение задачи | 94 |
| 3.2. Параметрический анализ собственных частот и собственных форм колебаний усеченной конической оболочки..... | 103 |
| 3.2.1. Скорость сходимости численного расчета собственных частот относительно числа аппроксимирующих функций | 103 |
| 3.2.2. Осесимметричные формы собственных колебаний жестко заземленной оболочки | 105 |
| 3.2.3. Зависимость собственных частот и степени влияния на них поперечных сдвиговых деформаций от параметра волнообразования..... | 107 |
| 3.2.4. Зависимость собственных частот и степени влияния на них деформаций сдвига от геометрических характеристик | 110 |
| 3.2.4.1. Варьирование относительной толщины..... | 110 |
| 3.2.4.2. Варьирование относительной длины | 112 |
| 3.2.5. Зависимость собственных частот и степени влияния на них деформаций поперечного сдвига от угла раствора конуса | 114 |
| 3.2.6. Зависимость собственных частот и степени влияния на них деформаций поперечного сдвига от жесткостных характеристик пакета | 117 |
| 3.2.6.1. Изменение жесткостных характеристик пакета | |

| | |
|--|------------|
| вследствие варьирования интенсивности армирования составляющих его слоев | 117 |
| 3.2.6.2. Варьирование относительной жесткости слоев трехслойного изотропного пакета | 121 |
| 3.2.6.3. Изменение жесткости трехслойного изотропного пакета вследствие варьирования толщин слоев | 123 |
| 3.2.7. Сравнение нижнего участка спектра жестко заземленной цилиндрической и жестко заземленной усеченной конической оболочек..... | 129 |
| ГЛАВА 4. СВОБОДНЫЕ КОЛЕБАНИЯ МНОГОСЛОЙНОГО СФЕРИЧЕСКОГО ПОЯСА | 133 |
| 4.1. Постановка и решение задачи | 133 |
| 4.2. Параметрический анализ собственных частот и собственных форм колебаний сферического пояса | 143 |
| 4.2.1. Оценка скорости сходимости численного расчета низших собственных частот относительно числа аппроксимирующих базисных векторов | 144 |
| 4.2.2. Влияние параметра окружного волнообразования | 145 |
| 4.2.3. Формы собственных колебаний сферического пояса ... | 146 |
| 4.2.4. Влияние геометрических характеристик на значения собственных частот, а также на степень их зависимости от поперечного сдвига | 147 |
| 4.2.4.1. Варьирование относительной толщины..... | 147 |
| 4.2.4.2. Варьирование относительной длины | 148 |
| 4.2.5. Влияние жесткостных характеристик компонентов композита..... | 151 |

| | |
|---|-----|
| 4.2.6. Влияние выбора закона распределения поперечных деформаций по толщине пакета на нижний участок спектра оболочки | 154 |
|---|-----|

ГЛАВА 5. СВОБОДНЫЕ КОЛЕБАНИЯ МНОГОСЛОЙНОЙ СОСТАВНОЙ

ОБОЛОЧКИ ВРАЩЕНИЯ

| | |
|--|------------|
| 5.1. Постановка и метод решения задачи | 156 |
| 5.2. Параметрический анализ собственных частот и собственных форм составной оболочки вращения | 160 |
| 5.2.1. Оценка количества аппроксимирующих решение функций при численном расчете нижнего участка спектра собственных частот | 161 |
| 5.2.2. Собственные частоты как функции параметра окружного волнообразования..... | 163 |
| 5.2.3. Формы собственных колебаний составной оболочки | 164 |
| 5.2.3.1. Зависимость форм собственных колебаний от параметра волнообразования..... | 164 |
| 5.2.3.2. Влияние положения поверхности сопряжения на формы собственных колебаний при постоянной длине меридиана оболочки ... | 166 |
| 5.2.3.3. Влияние положения поверхности сопряжения на формы собственных колебаний при постоянном отношении длин меридианов сопрягаемых поверхностей | 178 |
| 5.2.3.4. Влияние положения поверхности сопряжения на формы собственных колебаний при постоянной длине меридиана одной из сопрягаемых частей | 178 |

| | | |
|---|--|-----|
| 5.2.4. | Зависимость значений собственных частот и степени влияния на них поперечного сдвига от геометрических характеристик оболочки | 183 |
| 5.2.4.1. | Варьирование относительной длины меридиана оболочки..... | 183 |
| 5.2.4.2. | Варьирование относительной толщины оболочки | 185 |
| Глава 6. ДИНАМИЧЕСКАЯ УСТОЙЧИВОСТЬ МНОГОСЛОЙНОЙ КОМПОЗИТНОЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ..... 187 | | |
| 6.1. | Постановка и решение задачи | 189 |
| 6.1.1. | Формулировка разрешающей системы уравнений динамической устойчивости упругой многослойной цилиндрической оболочки..... | 189 |
| 6.1.2. | Определение характеристик невозмущенного осесимметричного состояния оболочки | 196 |
| 6.1.3. | Определение границ ОДН с учетом сдвиговых деформаций и всех действующих на оболочку инерционных сил | 202 |
| 6.1.3.1. | Некоторые свойства уравнения Матье..... | 203 |
| 6.1.3.2. | Уравнения критических частот..... | 204 |
| 6.2. | Некоторые предельные формы задачи о динамической устойчивости: Задача о свободных колебаниях. Задача о статической устойчивости..... | 210 |
| 6.3. | Частные формы задачи о динамической устойчивости..... | 210 |
| 6.3.1. | Определение ОДН с учетом лишь инерции прогиба | 211 |
| 6.3.2. | Построение ОДН с использованием приближенных формул В. В. Болотина | 212 |
| 6.4. | Параметрический анализ положения и размеров ОДН..... | 213 |

| | |
|--|------------|
| 6.4.1. Описание принятых при построении ОДН параметров оболочки..... | 213 |
| 6.4.2. Влияние учета сдвиговых деформаций на положение и размеры первых трех ОДН | 215 |
| 6.4.3. Влияние учета инерционных сил на положение и размеры первых трех ОДН | 218 |
| 6.4.4. Сравнение ОДН, построенных по приближенным формулам В. В. Болотина, с областями, полученными на основе неклассической системы динамической устойчивости | 219 |
| 6.5. Результаты параметрического анализа проблемы динамической устойчивости в принятой постановке | 221 |
| ЗАКЛЮЧЕНИЕ | 222 |
| ЛИТЕРАТУРА..... | 224 |

ВВЕДЕНИЕ

Разработка, внедрение и постоянное расширение сферы использования композитных материалов стимулируют развитие исследований по методам расчета конструкций из них [247]. В последние десятилетия происходит рост производства искусственных композитов на основе высокопрочных волокон и различных полимерных матриц. Согласно прогнозам [94, 244], такая тенденция сохранится и далее. Интерес к композитным материалам вызван высоким уровнем их конструктивных свойств: прочностью, жесткостью и т. п. Использование КМ в конструкциях позволяет повысить их надежность и весовую эффективность [244].

Желание облегчить конструкцию, не уменьшив при этом ее несущую способность, привело к использованию тонкостенных элементов в виде оболочек. Оболочки широко распространены в инженерных сооружениях, машиностроении, судостроении, в авиационной промышленности и ракетной технике. В связи с ростом мощностей и скоростей движения механизмов все большую актуальность приобретают задачи динамики оболочек, в частности, исследование свободных, вынужденных и параметрических колебаний.

Проблема надежности тонкостенных элементов конструкций выдвигает на первый план вопрос о повышении точности расчетов. Дело в том, что элементы из композитных материалов обладают рядом особенностей, к которым относят четко выраженную анизотропию деформативных свойств, низкую сопротивляемость трансверсальным деформациям и т. д. (см. например [13, 14, 30, 67, 105, 221, 247, 305]). Использование классической теории оболочек, пренебрегающей этими факторами, в ряде случаев [13, 14, 30, 67, 82, 153, 247, 329, 332 и другие] приводит к существенным

погрешностям в расчетах. Следовательно, корректный анализ задач теории оболочек требует привлечения уточненной теории более высокого порядка.

Естественная эволюция классической теории, широко представленной в литературе, в частности [79, 80, 103, 124, 161, 185, 211, 213, 242, 243, 262–264, 266, 268, 277, 321, 335–338, 340, 347, 352, 354, 393], привела к созданию и развитию неклассической теории оболочек. Исследования многослойных анизотропных пластин и оболочек представлено в монографиях Н. А. Алтуфова, П. А. Зиновьева и Б. Г. Попова [11], С. А. Амбарцумяна [13–16], А. Н. Андреева и Ю. В. Немировского [30], И. Ю. Бабича и А. Н. Гузя [46, 153], В. Н. Бакулина, И. Ф. Образцова и В. А. Потопахина [53], А. Е. Богдановича [67], В. В. Болотина и Ю. Н. Новичкова [83], Г. А. Ван Фо Фы [94], Г. А. Ванина, Н. П. Семенюка и Р. Ф. Емельянова [97], А. С. Вольмира [105, 106], Э. И. Григолюка и В. В. Кабанова [138], Э. И. Григолюка и Г. М. Куликова [141], Э. И. Григолюка и В. И. Мамаю [144], Э. И. Григолюка и П. П. Чулкова [145, 146], Я. М. Григоренко [147], Я. М. Григоренко и А. Т. Василенко [148], А. Н. Гузя [152], А. Н. Елпатиевского и В. В. Васильева [163], В. В. Кабанова [170], С. Н. Канна и др. [174], В. И. Королева [190, 191], А. К. Малмейстера, В. П. Тамужа и Г. А. Тетерса [221, 222], В. Л. Нарусберга и Г. А. Тетерса [247], Ю. В. Немировского и Б. С. Резникова [253], П. М. Огибалова [270, 271], П. М. Огибалова и М. А. Колтунова [273], П. М. Огибалова и В. Ф. Грибанова [272], Б. Л. Пелеха и М. А. Сухорольского [285], Б. Л. Пелеха и Г. А. Тетерса [286], В. В. Пикуля [292], Б. Е. Победри [295], А. О. Рассказова, И. И. Соколовской и Н. А. Шульги [301], Р. Б. Рикардса [304], Р. Б. Рикардса и Г. А. Тетерса [305], Г. Рейсснера [302, 409, 410], А. М. Скудры и Ф. Я. Булавса [319], В. П. Тамужа и Г. А. Тетерса [327], Ю. М. Тарнопольского и А. В. Розе [330], Л. И. Шкутина [361] и многих других. В этих работах сформулированы основные поста-

новки краевых задач теории многослойных анизотропных пластин и оболочек, разработаны методы решения и осуществлена их практическая реализация. Информацию об истории развития теории оболочек можно найти, например, в монографиях [83, 144, 186, 345, 368].

Современное состояние теории представлено в [13, 30, 61, 125, 139, 140, 162, 258, 293, 294 и другие], где четко выделены два основных метода построения приближенных теорий: метод гипотез и аналитический метод. Аналитический метод использован, например, в работах [18, 46, 82, 112, 152–154, 156, 312, 340, 401, 414]. Остановимся на методе гипотез.

Как отмечено в обзорах, при построении уточненных теорий большее распространение получил подход, основанный на принятии априорных предположений о процессе деформирования изучаемого элемента, т. е. метод гипотез. Этот подход развивается в двух основных направлениях.

Одно из направлений: принятие гипотез для каждого слоя отдельно. Такие модели представлены в работах В. В. Болотина [72–76], В. В. Болотина и Ю. Н. Новичкова [83], Э. И. Григолюка [136], а также с соавторами [137, 138, 141, 143–146], В. В. Кабанова [137, 138], Г. М. Куликова [141], В. И. Мамаева [143, 144], П. П. Чулкова [145, 146]. Также А. А. Барышева и П. Ф. Недорезова [54], П. А. Батова [55], А. М. Бутко и П. В. Колочинского [91], В. И. Королева [190], В. А. Крысько и др. [196, 197], В. Ф. Мейша и др. [226–229], В. Л. Нарусберга [245–247], Э. И. Старовойтова и др. [323, 324], В. Н. Паймушина и др. [278–283], Г. А. Тетерса [247] и многих других исследователей. При этом подходе поле напряжений и деформаций аппроксимируется отдельно для каждого слоя, что позволяет описывать локальные эффекты, возникающие при деформировании. К его недостаткам следует отнести зависимость порядка разрешающей системы, как от числа слоев, так и от структуры пакета. Поэтому такие модели используются преимущественно для двух и трехслойных пакетов.

Второе направление связано с принятием системы допущений для пакета слоев в целом. Этот вариант развивался С. А. Амбарцумяном [13–16], А. Н. Андреевым и Ю. В. Немировским [30–34, 252], Г. И. Беликовым [58–60], М. В. Белубекяном [64, 65], А. Е. Богдановичем [67], Г. А. Ваниным, Н. П. Семенюком и Р. Ф. Емельяновым [96, 97], Г. Д. Гавриленко [110], Я. М. Григоренко и А. Т. Василенко [148], Р. М. Киракосяном и М. С. Саркисяном [179], Р. Кристенсеном [195], Г. М. Куликовым и Ю. В. Кулешовым [200], Е. И. Михайловским [233, 234], Б. Л. Пелехом [284] в соавторстве с М. П. Шереметьевым [358] и Г. А. Тетерсом [286, 333], В. В. Пикулем [292], А. О. Рассказовым [300, 301], Р. Б. Рикардсом и Г. А. Тетерсом [305], Э. Рейснером [302, 409, 410], А. В. Розе и В. В. Хитровым [297, 307], Н. П. Семенюком [314], А. В. Сибиряковым [317], В. П. Фоминым [348] и другими учеными. При пакетном подходе порядок разрешающей системы не зависит ни от количества слоев, ни от их расположения. В этом направлении выполнены, например, работы, использующие гипотезу С. П. Тимошенко [58–60, 110, 147, 148, 292, 326, 341], С. А. Амбарцумяна [64, 65, 257], А. О. Рассказова [10, 179, 233, 297, 307], А. Н. Андреева и Ю. В. Немировского [26, 30–33, 37, 38, 252, 288–291].

В настоящей работе использована модель Андреева-Немировского [30], в основе которой лежит гипотеза о законе распределения сдвиговых деформаций по толщине пакета. Вносимая поправка обусловлена искривлением нормали к слоям в результате деформации. Принятые предположения позволяют удовлетворить условиям межслоевого контакта, а также краевым условиям. На базе этой модели исследованы задачи изгиба и устойчивости многослойных анизотропных балок, стержней, пластин и оболочек [19–22, 28, 34]. О корректности и эффективности используемой модели позволяет говорить обширное сравнение полученных результатов с решениями, полученными на базе приближенных теорий типа прямой и

ломаной линии, с учетом обжатия нормали, а также пространственной теории упругости.

Следующей проблемой, требующей решения, является выбор модели армированного слоя. Проблема описания физико-механических характеристик композита достаточно полно освещена в многочисленных статьях и монографиях. Здесь укажем лишь обзорные и итоговые работы [30, 42, 75, 83, 94, 95, 99, 104, 191, 193, 195, 201, 221, 244, 249, 253, 269, 274, 275, 295, 319, 331, 334, 352, 373, 374]. В них можно найти изложение теоретических и экспериментальных исследований в механике композитных материалов, описание физико-химического строения и особенностей механического поведения, а также сведения по истории вопроса.

При описании физико-механических характеристик композита на текущий момент времени можно выделить два основных подхода – структурный и феноменологический. В рамках феноменологического подхода, развитого, например, в работах [104, 201, 221, 267, 322, 331, 334, 359], армированный материал рассматривается как однородная среда с анизотропными свойствами. Уравнения состояния строятся на основе теории анизотропных сред, при этом оставшиеся неизвестными характеристики определяются экспериментальным путем. Следует отметить, что в силу жесткой связи между полученными в результате испытаний характеристиками и конкретной конструкцией, любое изменение структуры элемента или материала, из которого он изготовлен, требует повторения проведенных ранее опытов. Более того, остается невыясненной связь между истинными напряжениями и деформациями компонентов композита и вычисленными средними характеристиками материала, что не позволяет проанализировать механизм возникновения начального разрушения, следовательно, ставить задачи оптимального проектирования. От этих недостатков избавлен структурный подход.

В основе структурного подхода лежит предположение о существовании представительного элемента композита (характерного размера неоднородности гетерогенной среды), позволяющего описать процедуру осреднения. При этом физико-механические свойства выражаются через свойства компонент структуры. Следует подчеркнуть, что основополагающее предположение исключает из области применения этой модели все задачи, связанные с большими градиентами внешних силовых, тепловых и иных полей, когда невозможно пренебречь их изменением в представительном элементе. Структурные модели реализованы как в [30, 95, 99, 119–121, 132, 247, 249–251, 269], так и во многих других исследованиях. В настоящей работе использована структурная модель с двумерными волокнами Ю. В. Немировского [249], детальное описание которой приведено в [30].

Решение задач теории композитных оболочек в уточненной постановке требует привлечения численных методов [12, 30, 108, 119, 121, 132, 189, 367 и другие]. Аналитические и асимптотические методы в основном используются при исследовании однослойных пластин и оболочек, например в [87, 150, 155, 169, 212, 230, 241].

Отметим некоторые обзорные статьи [318, 360, 389], в которых проанализированы работы российских и зарубежных исследователей по численным методам теории оболочек, приведено описание программного обеспечения расчетов конструкций. Обзоры [371, 387, 388, 399] посвящены методам конечных элементов. Основы МКЭ изложены в монографиях [48, 50, 66, 93, 166, 296, 304, 313, 343, 350, 375, 378, 379]. Вариационно-разностные методы широко используются при расчете конструкций из композитных материалов, например, в [41, 51, 52, 71, 164, 168, 172, 181, 210, 232, 342, 390]. Однако отмечается [67, 132], что проблемы, возникающие при использовании МКЭ для расчета оболочек, связаны как с аппроксимацией поверхности, так и с объемом вычислений и с машинными ре-

сурсами. Поэтому при анализе многослойных конструкций часто используют методы типа «пристрелки», изложенные в [118, 237, 320] и реализованные авторами работ [7, 58–60, 84, 119–121, 132, 149, 218, 392 и другие].

Многими специалистами отмечалась необходимость разработки, создания и внедрения новых эффективных численных методов [30, 48, 67, 180, 230 и другие]. Дело в том, что использование при исследовании оболочек уточненной модели не только повышает порядок разрешающей системы дифференциальных уравнений, но и в ряде случаев изменяет структуру ее решений. Так, учет сдвиговых деформаций и (или) обжатия нормали приводит к появлению краевых эффектов напряженного состояния, связанных с появлением быстропеременных решений. Такие решения существенны лишь в зонах краевых закреплений, в точках приложения сосредоточенных сил и т. п. Это обстоятельство вносит существенные трудности при интегрировании краевых задач традиционными процедурами (перечисленными выше), применяемыми в классической теории оболочек и теории типа Тимошенко. Проблемы, возникающие при численном интегрировании подобных задач, позволяет преодолеть метод инвариантного погружения, используемый в настоящей работе.

Метод инвариантного погружения, разработанный и апробированный в работах А. Н. Андреева и Ю. В. Немировского [23–25, 30, 35, 36] при решении задач статики и динамики теории упругих многослойных композитных пластин и оболочек, обеспечил устойчивое численное интегрирование в широком диапазоне геометрических и физико-механических характеристик. Это дает основание рекомендовать его для эффективного численного решения подобного класса задач. Описание метода приведено в главе 1 § 3.

В заключение, дадим краткий обзор современного состояния задач о свободных колебаниях и динамической устойчивости оболочек. Обзор ра-

бот по динамике, выполненных до 1985 года, представлен в статьях и монографиях [67, 69, 80, 105, 106, 128, 176, 305, 362, 368 и другие]. Отметим справочники [129, 273, 370], содержащие результаты по частотам и формам собственных колебаний оболочек и пластин, полученные разными авторами. Работы, опубликованные в период 1989–2000 гг., проанализированы в обширных обзорах [400, 407, 408]. В них представлены методы динамического расчета и экспериментального изучения слоистых композитных и однородных оболочек, отмечена роль таких эффектов как начальные напряжения, присоединенные массы и прочее. Обзор работ по динамической устойчивости оболочек с учетом их реономных свойств представлен в [305], при ударном нагружении – в [49, 106], анализ работ, посвященных распространению волн в [67], где сделан вывод о том, что эффект учета поперечных сдвигов намного превосходит эффект учета инерции вращения. В перечисленных работах можно найти краткие исторические комментарии.

Задачами динамической устойчивости оболочек и проблемой свободных колебаний занимались такие ученые как Р. А. Абдикаримов и Д. Г. Ахмаджонов [1, 364], С. Д. Акбаров [6, 159], И. А. Алейников и Е. В. Власова [8, 9], А. С. Амбарцумян [13, 14], И. Я. Амиро, В. А. Заруцкий и В. Г. Паламарчук [17], А. Н. Андреев [27, 30], А. А. Андронов и М. А. Леонтович [39], И. Ю. Бабич и Н. П. Семенюк [47], Н. М. Беляев [381], Н. Н. Боголюбов и Н. М. Крылов [382], В. А. Боднер, В. В. Болотин [77–80], А. Е. Богданович [67–70], А. С. Братусь [85], А. С. Вольмир [105, 106], Ю. В. Гаврилов [111, 357], Г. З. Геворкян [114, 115], В. Ц. Гнуни [116, 117], И. И. Гольденблат [123], А. Л. Гольденвейзер [126–128, 369], В. С. Гонткевич [129–131], Г. Л. Горынин [133], Г. Ю. Джанелидзе и М. А. Радциг, А. В. Кармишин, В. А. Лясковец, В. И. Мяченков и Фролов А. Н. [176], Ю. Г. Коноплев [187], Е. З. Король [192], Г. М. Куликов и Ю. В. Кулешов [200], В. И. Купцов [203,

204], Л. В. Курпа [205–207], В. Кухарский, Г. С. Лейзерович [208, 328], В. Б. Лидский [45, 128], С. А. Лычев [214], А. Ляв [215], А. М. Масленников [224], И. Мирский [403], Г. В. Мишенков [238], Л. А. Мовсисян [239, 240], В. Л. Нарусберг [245–247], Ю. В. Немировский [27, 30, 254], М. В. Никулин [259], П. М. Огибалов [270, 271], В. Н. Паймушина и В. Р. Хусаинов [278, 279, 282], Б. Л. Пелех и Г. А. Тетерс [286, 305, 333], А. О. Рассказов и В. Г. Карнаухов [177], Р. Б. Рикардс [305, 333], Р. С. Сабирова [308], В. И. Самсонов [254, 309–311], Л. С. Саркисян [312], Ю. Э. Сеницкий и И. Е. Козьма [315, 316], Ф. Х. Тазюков [187], Н. А. Тарануха [328], Ю. М. Тарнопольский и Розе А. В. [330], П. Е. Товстик [56, 128, 339], Ю. Ю. Швейко и А. Д. Брусиловский [357], В. Н. Челомей [351], Г. Шмидт [362], А. П. Филлипов с соавторами [346], В. Флюгге [347], Ю. А. Хамренко [349], Б. Х. Эшматов [363], В. А. Якубович и В. М. Стражинский [365, 366]. А также R. N. Arnold и G. V. Warburton [384], C. W. Bert [385, 386], S. V. Dong и F. K. W. Tso [391], K. Forsberg [394], J. V. Greenberg и Y. Stavsky [396, 397], R. M. Jones и H. S. Morgan [398], G. V. Warburton [415], V. I. Weingarten [416] и многие другие. Другими динамическими задачами теории оболочек занимались такие ученые, как В. Н. Бакулин, И. Ф. Образцов и В. А. Потопахин [53], М. В. Вильде [101, 102], З. Весоловский [100], С. П. Кунцевич [202], Ю. В. Немировский и В. И. Самсонов [255], Ю. Н. Новичков [260, 261] и многие другие.

Решение задач о свободных колебаниях конструктивных тонкостенных элементов имеет фундаментальное значение для разработки многих проблем динамики: исследование вынужденных и параметрических колебаний, динамической потери устойчивости и других. То есть при исследовании процессов, использующих информацию о собственных частотах и формах колебаний.

Проблема расчета собственных колебаний тонкостенных оболочек впервые поставлена Лявом (1888 г), получившим уравнения малых колебаний, а так же исследовавшим изгибные колебания цилиндрических оболочек [215]. В 1894 г. Рэлей [303] получил формулу для собственных частот изгибных колебаний цилиндрических оболочек. В 1933 году впервые В. Флюгге [347] установил существование для каждой изгибной формы колебаний свободно опертой цилиндрической оболочки группы из трех собственных частот. Подобную задачу для жестко заземленной оболочки впервые рассматривал А. П. Филлипов в 1937 году.

Собственные колебания изотропных однослойных и многослойных пластин и оболочек изучались в [45, 56, 77, 78, 105, 111, 126–128, 208, 210, 270, 271, 339, 384, 394, 403, 415, 416]. В работе Р. Арнольда и Г. Уорбертона [384] (1953 г.) было установлено существование минимума собственных частот относительно номера волнообразования, также приведены материалы экспериментальных исследований колебаний стальных оболочек.

Исследования, проводившиеся в 60-70 годах в рамках классической теории тонких оболочек, преимущественно направлены на изучение влияния условий закрепления краевых поверхностей на частоты и формы собственных колебаний. Общее решение задачи о собственных колебаниях изотропной цилиндрической оболочки, допускающее рассмотрение любых краевых условий, было предложено К. Форсбергом [394] и Г. Уорбертоном [415].

Качественный анализ форм и частот собственных колебаний тонких упругих изотропных оболочек проведен А. Л. Гольденвейзером в [126, 127], а также в соавторстве с В. Б. Лидский и П. Е. Товстик [128]. Проблема плотности частот и краевые эффекты, возникающие при колебаниях, изучалась в работах В. В. Болотина [77, 78] и П. Е. Товстика [56, 339].

В это же время развивалась теория собственных колебаний ортотропных однослойных оболочек. К числу первых относятся работы В. С. Гонткевича [129–131] (1961 г.), И. Мирского [403] (1964 г.), М. В. Никулина [259] (1965 г.) и Р. С. Сабировой [308] (1965 г.).

В настоящее время теория однослойных оболочек продолжает привлекать внимание исследователей. Построением системы базисных функций и обоснованием возможности ее использования при решении задачи о свободных и вынужденных колебаниях однослойных оболочек занимались авторы работ [8, 9, 315, 316]. В качестве таких функций предлагались собственные функции краевых задач, определяемых разрешающей системой.

Колебания однослойных композитных (ортотропных) пластин и оболочек на базе трехмерной теории упругости рассматривались в [3, 4, 6, 7, 159, 164] и с использованием гипотезы Кирхгофа-Лява в [43, 56, 130, 178, 192, 223, 259, 308, 411]. В [3, 4] для тонкой пластины при принятых краевых условиях было установлено существование трех групп собственных чисел, двум из которых соответствуют сдвиговые колебания, а третьей – продольные. Влияние локального искривления на частоты первой гармоники для толстой защемленной пластины изучалось в [6, 159] и для полосы в [164]. Задачи решены численно с помощью трехмерного моделирования методом конечных элементов. В [178] исследованы нелинейные колебания оболочек ступенчато-переменной толщины, разработан вариационно-параметрический метод, позволяющий находить рациональные параметры оболочек. В [223] исследовались собственные поперечные колебания прямоугольной ортотропной пластины, два противоположных края которой неподвижно закреплены, а два другие – свободно оперты, были получены трансцендентные уравнения частот и аналитические представления амплитуд колебаний в направлениях, параллельных координатным осям. В [411] рассматривался резервуар давления в виде композитной цилиндрической

оболочки с полусферическими торцами. Уравнения движения были сведены к системе ОДУ для сферического и цилиндрического сегмента, а формы колебаний представлены функциями Лежандра и тригонометрическими функциями.

В статьях, опубликованных в последние годы (преимущественно с 2000 г.), широко представлены результаты, полученные в теории трехслойных пластин и оболочек (в основном, на базе гипотез типа ломаной линии): [47, 151, 209, 276, 278, 279, 282, 312, 391]. В [151] приведено трансцендентное уравнение для собственных чисел и построена фундаментальная система собственных ортонормированных функций. В [278, 279, 282] для оболочек с трансверсально-мягким наполнителем собственные колебания изучены на основе геометрически нелинейных уравнений движения с учетом больших изменений параметров динамического НДС в тангенциальных направлениях.

Не менее полно представлены исследования собственных колебаний ортотропных и анизотропных многослойных элементов. Эти результаты условно разделим на группы относительно учтенных факторов:

Решения, полученные на основе гипотезы плоских сечений [205–207], которые отражают зависимость спектра пологих конструкций от их формы и угла поворота главных направлений слоев при различных условиях закрепления. При решении использован вариационный метод Ритца и теория R-функций.

Исследования, проведенные на основе гипотезы прямых нормалей [47, 67, 165, 200, 286, 305, 310, 330, 342]. Здесь установлены области, где учет поперечного сдвига приводит к снижению собственных частот, даже при определении низших тонов.

Работы, выполненные с привлечением гипотез более высокого порядка [27, 30, 40, 114, 115]. В [114, 115] на основе теории Амбарцумяна иссле-

довано влияние поперечных сдвигов и инерции вращения на свободные поперечные колебания ортотропных пластин линейно-переменной толщины при шарнирном опирании. В работах [27, 30] на базе теории Андреева-Немировского решены задачи для многослойных упругих композитных оболочек вращения при произвольных параметрах армирования и произвольных краевых условиях.

Изучение свободных колебаний выполнялось также на основе трехмерной теории для многослойных балок [133] и пластин [417]. В [417] при рассмотрении толстых слоистых прямоугольных пластин с точечными опорами использована аппроксимация тригонометрическими функциями со степенными добавками. В [133, 134] построена асимптотическая теория свободных и вынужденных поперечных колебаний упругих композитных балок на основе асимптотического расщепления уравнений пространственной теории упругости. Нулевые приближения частот свободных колебаний соответствуют частотам технической теории балки. Метод заключается в расщеплении первоначальной пространственной краевой задачи на систему двумерных краевых задач (в сечении), и двух одномерных краевых задач вдоль образующей. В [100–102, 260, 261] изучалось распространение волн в упругих элементах.

В заключительной части работы рассмотрена задача о динамической устойчивости. При решении задач динамической устойчивости упругих систем фундаментальное значение имеют труды В. В. Болотина [79, 80]. В них сформулированы критерии динамической устойчивости, изложены принципы нелинейных параметрических колебаний систем, получены приближенные расчетные формулы, определяющие границы первых трех областей динамической неустойчивости, установлена допустимость определения этих границ на основе линеаризованных уравнений движения.

Впервые недостаточность линейной постановки задачи определения амплитуд колебаний в резонансных режимах сформулировал в 1948 году И. И. Гольденблат [123]. Нелинейная теория закладывалась и развивалась в середине 60-х годов В. В. Болотиным наряду с В. Ц. Гнуни [116, 117] и Г. В. Мишенковым [238]. Ее дальнейшее развитие в работах А. С. Вольмира [105], А. Е. Богдановича [67] и других ученых. В первых работах [116, 117, 238] использовалась аппроксимация прогиба одним членом двойного ряда Фурье, система уравнений движения при этом сводилась к нелинейному ОДУ с периодическими коэффициентами. В [67, 105] динамическая устойчивость стержней и оболочек изучалась на основе гипотезы прямой и ломаной нормали соответственно с аппроксимацией несколькими элементами двойных рядов Фурье. Также нелинейные параметрические колебания шарнирно закрепленных, вязкоупругих ортотропных пластин и оболочек, нагруженных осевым сжатием, изучались в [1, 363, 364]. В этих работах рассматривалась либо вибрационная [1], либо быстро возрастающая нагрузка типа $P(t) = vt$, где v – скорость нагружения [363, 364]. Решение строилось на основе модели Тимошенко с применением метода Бубнова-Галеркина. Задача была переформулирована для системы нелинейных интегро-дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами относительно времени.

Задачи о параметрических колебаниях оболочек могут быть сведены (при дополнительных упрощениях) к исследованию устойчивости тривиального решения одного или нескольких дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами. Отметим основные монографии по теории таких систем: [62, 158, 194, 220, 216, 231, 355, 366].

Подавляющее число работ по исследованию параметрических колебаний и построению ОДН реализуют схемы, приводящие первоначальные модели к уравнению (или системе) Матье-Хилла. В результате, построение

ОДН сводится к решению проблемы (возможно, обобщенной) собственных значений линейной системы. Такой подход реализован, например, в работах [89, 90] для упругих изотропных оболочек, в [29, 184, 240, 406] – для однослойных пластин и оболочек из композита, в [177] – для трехслойных оболочек, а также для многослойных ортотропных пластин и оболочек, например, в [68, 239, 247, 305, 333, 405]. В этих работах могут быть учтены только «главные» (по терминологии, используемой в [365, 366]) резонансы. Прокомментируем некоторые из этих работ:

В работе [184] рассматривались ортотропные круговые конические оболочки, находящиеся под действием пульсирующего осевого и гидростатического давления, система разрешающих дифференциальных уравнений выводилась на основе принципа Остроградского-Гамильтона. Этот же принцип был использован в [89, 90] при изучении низкочастотных колебаний тонких упругих изотропных оболочек под действием осесимметричного гармонического возбуждения внешней силой. При построении собственной функции и упрощении системы нелинейных уравнений использован метод асимптотического интегрирования, основанный на малости относительной толщины оболочки. Определены области неустойчивости и амплитуды параметрических колебаний.

В [239] изучена динамическая устойчивость многослойных изотропных пластин с симметричным и антисимметричным расположением слоев. На внешних плоскостях принималась либо сдвигающие напряжения, либо чистый изгиб. Определены области главных параметрических резонансов.

В статье [29] выстроены первые четыре области динамической неустойчивости для свободно опертой трансверсально-изотропной упругой пластинки, нагруженной торцевым сжимающим усилием.

В [240] рассматривалась цилиндрическая оболочка из композита при медленном движении нормального давления с одного конца в другой. Ско-

рость движения позволила отбросить в разрешающих уравнениях инерционные члены, однако были учтены вязкие свойства материала.

В работе [406] представлен анализ динамической устойчивости композитной цилиндрической оболочки. Уравнения Матье-Хилла получены в результате аппроксимации по нормальным формам. Области неустойчивости найдены по методу В. В. Болотина.

В статье [177] на основе гипотезы Кирхгофа-Лява, дополненной гипотезами о распределении электрических полевых величин, разработана модель параметрических колебаний трехслойной композитной оболочки вращения, составленной из пассивного среднего слоя и двух слоев с пьезоэффектом. Рассматривалась оболочка, находящаяся под действием гармонических нагрузок. При использовании МКЭ исследовалась главная область динамической неустойчивости. В результате проведенного параметрического анализа (структурная неоднородность, диссипация, электрические граничные условия) сделан вывод о существенном влиянии электрических граничных условий на ширину, положение на частотной оси и критический параметр возбуждения, соответствующие ГОДН.

В работах [68, 247, 305, 333] при изучении ортотропных многослойных оболочек использована модель Тимошенко. Установлено [305, 333], что для армированных пластиков неучет поперечных сдвигов при большом значении E/G приводит к существенным качественным погрешностям в задачах длительной устойчивости пластин и оболочек. Сделан вывод о сужении областей неустойчивости в случае вязкого сопротивления. В [247] оценено влияние обжатия нормали при использовании послойной оболочечной модели.

В ряде исследований ставится задача учета не только главных, но и комбинационных резонансов, которые могут возникать в окрестностях возбуждающих частот со значениями кратными линейным комбинациям

собственных частот с различными номерами. Теоретическая разработка этого вопроса представлена в монографиях В. А. Якубовича и В. М. Стражинского [365, 366]. Ими сформулированы критерии определения «опасных» (возможно резонансных) частот внешней нагрузки. Предложен метод исследования областей параметрического резонанса и построения границ ОДН, который основан на анализе поведения мультипликаторов возмущенной системы. Развитие этого направления представлено в работах [85, 214, 217, 395]. Например, в [395] изучена устойчивость бесконечно широкой упругой однослойной композитной пластины при действии сжимающих нагрузок и внезапных температур в геометрически нелинейной постановке. В [214] исследуются нестационарные колебания трехслойных оболочек, учитываются возможные внутренние резонансы, соответствующие кратным собственным частотам. При этом использовано разложение по полной системе собственных функций. Проанализировано влияние кратных форм на динамическую реакцию сталебетонной оболочки.

В работе [217] рассматривалась линейная колебательная система со многими степенями свободы с периодическими коэффициентами, зависящая от трех параметров: частоты, амплитуды периодического воздействия и параметра диссипативных сил, причем последние две величины предполагались малыми. Исследована устойчивость тривиального решения, соответствующая параметрическому резонансу. Получены общие выражения для областей основного и комбинационного резонансов при произвольной матрице периодического воздействия и положительно определенной матрице диссипативных сил.

В [85] исследовалась потеря устойчивости неконсервативной системы. Рассматривался случай, когда при заданном распределении жесткостей и некотором критическом значении параметра потери устойчивости возникают нулевые частоты свободных колебаний. Показано, что в этом случае

нулевая частота свободных колебаний почти всегда является двукратной. Поставлена задача о стабилизации системы за счет выбора подходящих распределений жесткостей при фиксированном (критическом) значении параметра потери устойчивости. В качестве примера рассмотрена свободно опертая труба переменного сечения, внутри которой протекает жидкость, при различных способах задания диссипативных сил.

Проблема динамической устойчивости и колебаний слоистых подкрепленных, перфорированных и ребристых оболочек отражена в [17, 57, 178, 392]. Эти работы, за исключением [57], выполнены на основе классической теории Кирхгофа-Лява.

Динамическое поведение тонкостенных конструкций с начальными несовершенствами рассматривалось, например в [198, 328]. Оболочки, находящиеся под действием ударных нагрузок, изучались, например в [49, 402], где было отмечено превышение критических динамических нагрузок по сравнению со статическими нагрузками. Исследование локальных параметрических колебаний представлено, в частности, в [101, 102, 202].

Задачи термоустойчивости пластин и оболочек представлены, например, в [53, 254, 255, 272, 311, 395].

Проведенный анализ подтверждает, что в целом проблема собственных колебаний оболочек вращения достаточно хорошо разработана. Однако два принципиальных вопроса до сих пор практически не затронуты: проблема колебаний составных оболочек и эффективная реализация уточненной задачи при общем типе краевых условиях.

В отличие от проблемы свободных колебаний, решение задачи об определении границ и построении областей динамической неустойчивости многослойных композитных оболочек развивается недостаточно интенсивно, несмотря на неоспоримую актуальность. Исследования, представленные в данной работе, в некоторой степени восполняют эти пробелы.

ЦЕЛЬ ДИССЕРТАЦИОННОЙ РАБОТЫ

Описание свободных колебаний упругих многослойных композитных оболочек вращения с общим типом закрепления кромочных поверхностей на базе неклассической теории оболочек высокого порядка в геометрически линейной постановке.

Построение произвольного числа областей динамической неустойчивости (ОДН) многослойных оболочек с учетом всех инерционных слагаемых на основе неклассической теории оболочек.

Оценка степени влияния принятых уточнений на спектр собственных частот и собственные формы колебаний оболочек вращения, а также на положение, форму и размеры областей динамической неустойчивости.

НАУЧНАЯ НОВИЗНА

Модифицирован и апробирован метод определения спектра собственных частот и форм колебаний составных оболочек вращения при произвольных условиях закрепления.

Построены области динамической неустойчивости многослойной цилиндрической оболочки в уточненной постановке. Получена оценка влияния инерционных слагаемых на размер и положение областей динамической неустойчивости.

Проведено обширное параметрическое исследование в рассматриваемых задачах динамики оболочек вращения, по результатам которого сделан вывод о границах применимости используемой модели.

ПРАКТИЧЕСКАЯ ЦЕННОСТЬ РАБОТЫ

Полученные результаты исследования спектра собственных частот и собственных форм колебаний упругих композитных оболочечных элементов конструкций, а также результаты исследования областей динамической

неустойчивости многослойной цилиндрической оболочки, могут служить основой как при выработке конкретных технологических решений, так и при формулировке общих рекомендаций по вопросам проектирования конструкций.

ДОСТОВЕРНОСТЬ РЕЗУЛЬТАТОВ

Достоверность научных положений и выводов обеспечена корректностью принятых постановок рассматриваемых задач и методов, используемых при решении, а также непротиворечивостью полученных результатов с результатами, полученными другими авторами.

АПРОБАЦИЯ РАБОТЫ

Основные положения диссертационной работы докладывались и обсуждались на следующих конференциях и семинарах: XVIII, XIX Межреспубликанских конференциях по численным методам решения задач теории упругости и пластичности (Кемерово, 2003; Бийск 2005); V Всероссийском семинаре «Проблемы оптимального проектирования сооружений», посвященном 75-летию НГАСУ (Сибстрин) (Новосибирск, 2005); Всероссийской конференции «Деформирование и разрушение структурно-неоднородных сред и конструкций» (Новосибирск, 2006).

ПУБЛИКАЦИИ

По теме диссертационной работы опубликовано 8 статей в научных журналах и сборниках трудов конференций, а также тезисы докладов на научных конференциях. Список публикаций приведен в библиографическом списке.

СТРУКТУРА И ОБЪЕМ

Диссертационная работа состоит из введения, шести глав, заключения и библиографического списка, включающего 417 наименований. Общий объем диссертации составляет 270 страниц.

СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во введении дано обоснование актуальности выбранной темы, сформулированы цели и задачи исследования, представлен краткий обзор работ, выполненных другими авторами по данной тематике, приведено краткое содержание диссертации по главам.

Первая глава посвящена общей постановке задачи:

- приведено описание структурной модели упругого однонаправленного армированного слоя.
- приведена разрешающая система нелинейных неклассических уравнений динамики анизотропных оболочек вращения и замыкающие ее системы краевых условий.
- получены линеаризованные уравнения и краевые условия задачи о свободных установившихся гармонических колебаниях композитных оболочек вращения (в том числе составных), которые сформулированы как краевые задачи на собственные значения для системы уравнений в частных производных.
- описан численный алгоритм решения рассматриваемых задач теории оболочек, основанный на методе численного интегрирования краевых задач для систем обыкновенных дифференциальных уравнений, в интеграции с методом разделения переменных при помощи рядов Фурье, методом Бубнова-Галеркина, а также QR-алгоритмом.

Во второй, третьей, четвертой и пятой главах решаются задачи о свободных установившихся гармонических колебаниях многослойных армированных ортотропных оболочек вращения.

Во второй главе представлено решение задачи о свободных колебаниях цилиндрической оболочки. Выполнен обширный параметрический анализ, включающий в себя оценку влияния на собственные частоты и собственные формы колебаний поперечных сдвиговых деформаций.

В третьей и четвертой главах аналогичное исследование проведено для усеченной конической оболочки и сферического пояса. В пятой главе задача о свободных колебаниях рассматривалась для составной оболочки вращения, полученной сопряжением цилиндрической оболочки и сферического пояса.

В шестой главе представлено решение задачи о динамической устойчивости упругой многослойной композитной цилиндрической оболочки. Построены области динамической неустойчивости (ОДН). Приведены результаты широкого параметрического анализа, отражающие влияние сдвиговых деформаций, а так же инерционных сил различной природы, на расположение и площади ОДН.

ГЛАВА 1. ДИНАМИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ ТЕОРИИ МНОГОСЛОЙНЫХ КОМПОЗИТНЫХ ОБОЛОЧЕК ВРАЩЕНИЯ И ИХ ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ

1.1. МОДЕЛЬ АРМИРОВАННОГО СЛОЯ

В этом параграфе приведено описание структурной модели армированного слоя. Представляется целесообразным использование относительно простых в реализации моделей, которые учитывают значимые особенности материала. Действительно, в процессе изготовления композита, в его структуру вносятся возмущения случайного характера, которые могут обесценить усилия, направленные на уточнение расчета. Структурная модель с двумерными волокнами [30, 249, 250], использованная при описании композитного материала, отвечает требованиям относительной простоты реализации и достаточной точности результата. Уравнения модели устанавливаются при выполнении следующих условий:

1. Армированный слой представляет собой упругое однородное изотропное связующее с внедренной в него регулярной сетью однонаправлен-

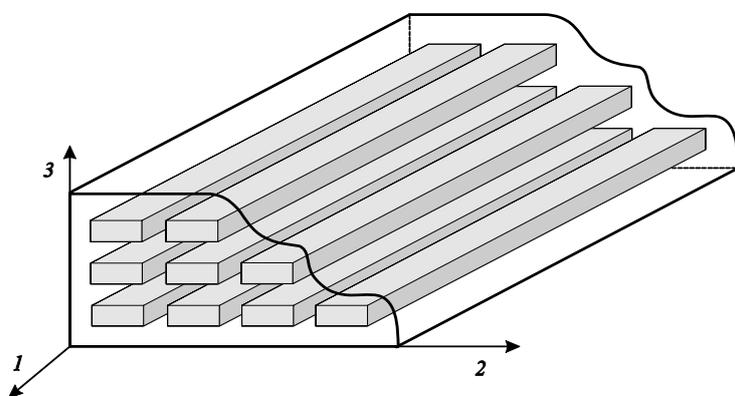


Рис. 1.1. Однонаправленный волокнистый композит.

ных упругих изотропных волокон (рис. 1.1). В результате этого, как для связующего, так и для армирующего выполняется закон Гука для изотропных сред [30, 265].

2. Армирующие волокна находятся в идеальном контакте со связующим. При переходе через поверхности армирующее–связующее вектор напряжений непрерывен на площадках, параллельных поверхностям раздела сред. Локальные эффекты напряженно-деформированного состояния вблизи этих поверхностей не учитываются.

3. Армирующие волокна воспринимают как сжимающие, так и растягивающие усилия. Они имеют прямоугольное поперечное сечение. Их число достаточно велико, а структура регулярна, что дает возможность выделить представительный элемент армированного слоя (рис. 1.2).

4. Можно пренебречь изменением характеристик внешних силовых полей в пределах представительного элемента. Это допущение выполняется в большинстве практически важных случаев. Исключение составляют задачи, связанные с действием сосредоточенных сил, распространением коротких волн и т. п.

5. Удлинения и сдвиги, возникающие в процессе деформирования, остаются малыми по сравнению с единицей.

Ниже рассматривались только однонаправленные волокнистые композиты, характеристики которых удовлетворяют всем сформулированным выше требованиям. Структурные параметры армирования в плоскости слоя ω_l и по его

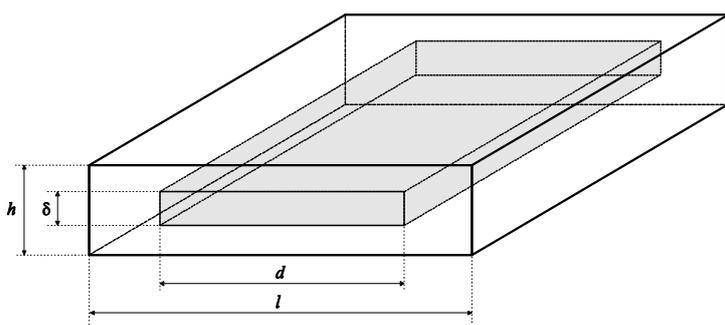


Рис. 1.2. Представительный элемент армированного слоя.

плоскости слоя ω_l и по его

высоте ω_z вводятся следующими отношениями (рис. 1.2)

$$\omega_l \equiv \omega = d/l, \omega_z = \delta/h. \quad (1.1.1)$$

Характеристики связующего, будут отмечаться индексом «с», а армирующего – «а». Например, E_a, ν_a, E_c, ν_c – модули Юнга и коэффициенты Пуассона армирующего («а») и связующего («с») соответственно.

Свяжем с представительным элементом систему координат (рис. 1.1), оси 1 и 2 которой направлены вдоль и перпендикулярно волокну соответственно, а ось 3 – по его высоте. Таким образом, выделяя представительный элемент композитного материала и проводя в его пределах осреднение характеристик НДС (подробности вывода представлены в [30]), получаем зависимости между компонентами осредненных тензоров напряжений σ и деформаций ε ($\alpha, \beta = 1, 2; \alpha \neq \beta$):

$$\sigma_{\alpha\alpha} = a_{\alpha\alpha}\varepsilon_{\alpha\alpha} + a_{\alpha\beta}\varepsilon_{\beta\beta}, \sigma_{\alpha\beta} = a_{33}\varepsilon_{\alpha\beta}, \tau_{\alpha 3} = G_{\alpha 3}\gamma_{\alpha 3}. \quad (1.1.2)$$

Коэффициенты соотношений (1.1.2), т. е. физические компоненты эффективных тензоров тангенциальных ($a_{\alpha\beta}$) и поперечных сдвиговых ($G_{\alpha 3}$) жесткостей армированного слоя определяются формулами [30]

$$\begin{aligned} a_{11} &= \frac{(1-\omega_z)E_c}{1-\nu_c^2} + \omega_z \left(\omega E_a + (1-\omega)E_c + \frac{[\omega\nu_a + (1-\omega)\nu_c]^2 E_c E_a}{\omega(1-\nu_a^2)E_c + (1-\omega)(1-\nu_c^2)E_a} \right), \\ a_{12} = a_{21} &= \frac{(1-\omega_z)\nu_c E_c}{1-\nu_c^2} + \omega_z \left(\frac{[\omega\nu_a + (1-\omega)\nu_c]E_c E_a}{\omega(1-\nu_a^2)E_c + (1-\omega)(1-\nu_c^2)E_a} \right), \\ a_{22} &= \frac{(1-\omega_z)E_c}{1-\nu_c^2} + \omega_z \left(\frac{E_c E_a}{\omega(1-\nu_a^2)E_c + (1-\omega)(1-\nu_c^2)E_a} \right), \\ a_{33} &= \frac{(1-\omega_z)E_c}{(1+\nu_c)} + \omega_z \left(\frac{E_a E_c}{(1-\omega)(1+\nu_c)E_a + \omega(1+\nu_a)E_c} \right), \\ G_{13}^{-1} &= \frac{2(1-\omega_z)(1+\nu_c)}{E_c} + \omega_z \left(\frac{2(1+\nu_a)(1+\nu_c)}{\omega(1+\nu_c)E_a + (1-\omega)(1+\nu_a)E_c} \right), \\ G_{23}^{-1} &= \frac{2(1-\omega_z)(1+\nu_c)}{E_c} + 2\omega_z \left(\frac{(1-\omega)(1+\nu_c)E_a + \omega(1+\nu_a)E_c}{E_a E_c} \right). \end{aligned} \quad (1.1.3)$$

Зависимости (1.1.3) выписаны в ортогональной системе координат 1, 2, 3, направления осей которой связаны с направлением армирования (рис. 1.1). Если координатная система x_1, x_2, x_3 получена из системы 1, 2, 3 поворотом плоскости 1, 2 на угол φ , то связь между компонентами тензоров

$(a_{\alpha\beta}), (G_{\alpha\beta})$ в старой и в новой $(a'_{\alpha\beta}), (G'_{\alpha\beta})$ системе координат устанавливаются формулами преобразования [30] ($\alpha, \beta = 1, 2; \alpha \neq \beta$):

$$\begin{aligned} a_{\alpha\alpha} &= a'_{\alpha\alpha} \cos^4 \varphi + a'_{\beta\beta} \sin^4 \varphi + (0.5a'_{12} + a'_{33}) \sin^2 2\varphi, \\ a_{12} &= a'_{12} (\cos^4 \varphi + \sin^4 \varphi) + 0.25(a'_{11} + a'_{22} - 4a'_{33}) \sin^2 2\varphi, \\ a_{33} &= a'_{33} (\cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi)^2 + 0.25(a'_{11} + a'_{22} - 2a'_{12}) \sin^2 2\varphi. \end{aligned}$$

Так при повороте на угол $\varphi = 90^\circ$ эти равенства определяют зависимости вида

$$a'_{11} = a_{22}, a'_{22} = a_{11}, a'_{12} = a_{12}, a'_{33} = a_{33}, G'_{13} = G_{23}, G'_{23} = G_{13}. \quad (1.1.4)$$

Уравнения (1.1.1)–(1.1.3) описывают модель композитного слоя, армированного семейством непрерывных однонаправленных волокон регулярной структуры и прямоугольного поперечного сечения. В дальнейшем будут изучаться слоистые оболочки, собранные именно из таких слоев. Однако важно подчеркнуть, что область применимости этой модели значительно шире, поскольку уравнения состояния (1.1.2) также описывают композитные материалы, армированные несколькими разнонаправленными волокнами, тканями и т. д.

В заключение этого параграфа отметим один из широко распространенных случаев, когда интенсивность армирования ω неоднородна по переменной x^1 (рис. 1.3). Такая ситуация возникает, например, при армировании вдоль образующей волокнами постоянного поперечного сечения конической оболочки, или при армировании вдоль меридиана сферического пояса.

Выясним зависимость интенсивности армирования ω от x^1 . Будем считать, что в некоторой плоскости $x^1 = x_0$ интенсивность ω_0 известна. Рассмотрим слой (рис. 1.3),

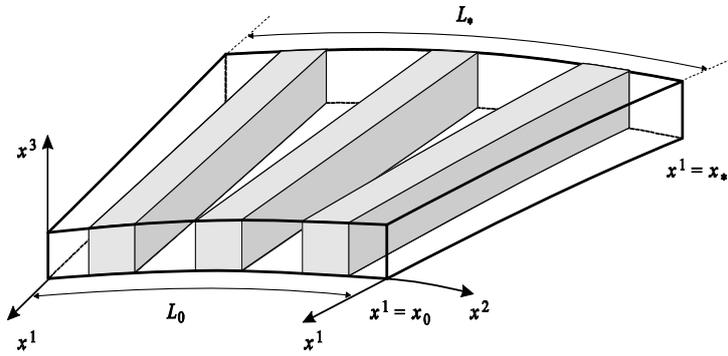


Рис. 1.3. Слой с переменным по x^1 линейным размером, армированный волокнами постоянного поперечного сечения.

линейных размер которого изменяется вдоль оси x^1 . При этом армирование осуществлялось вдоль оси x^1 волокнами постоянного сечения. Обозначим через L_0 и L_* линейной размер в

плоскости слоя в сечениях $x^1 = x_0$ и $x^1 = x_*$ соответственно, а через l_0 и l_* – соответствующие размеры представительных элементов (рис. 1.4). Тогда из (1.1.1) следует,

$$\omega_0 = d / l_0, \quad \omega = d / l_*, \quad (1.1.5)$$

где ω_0, ω – интенсивности армирования в плоскости слоя, соответственно в сечениях $x^1 = x_0$ и $x^1 = x_*$. Зависимость между величинами ω_0, ω получаем, исключая из (1.1.5) параметр d :

$$\omega = \frac{l_0}{l_*} \omega_0 = \frac{L_0}{L_*} \omega_0. \quad (1.1.6)$$

Считая $x_0 < x_*$, заметим, что если $L = L(x^1)$ – монотонно возрастающая

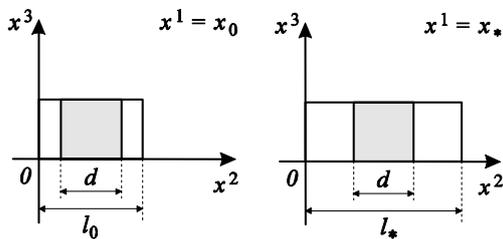


Рис. 1.4. Представительный элемент в сечениях $x^1 = x_0$ и $x^1 = x_*$.

(убывающая) функция, то ω_0 – максимальная (минимальная) интенсивность армирования в плоскости слоя. Установленные выражения (1.1.6) будут использованы в главе 3 при изучении усеченных конических оболочек, главе 4 при изучении сферических поясов и

главе 5 при исследовании составных оболочек вращения.

1.2. НЕКЛАССИЧЕСКИЕ НЕЛИНЕЙНЫЕ УРАВНЕНИЯ ДИНАМИКИ МНОГОСЛОЙНЫХ ОБОЛОЧЕК ВРАЩЕНИЯ В СИСТЕМЕ КООРДИНАТ, ОПРЕДЕЛЯЕМОЙ ЛИНИЯМИ ГЛАВНЫХ КРИВИЗН

В данном параграфе сформулирована система соотношений, описывающая нелинейные колебания многослойных анизотропных оболочек. Указан предельный переход к уравнениям классической теории. Все зависимости составлены в системе координат, оси которой совпадают с линиями кривизн оболочки.

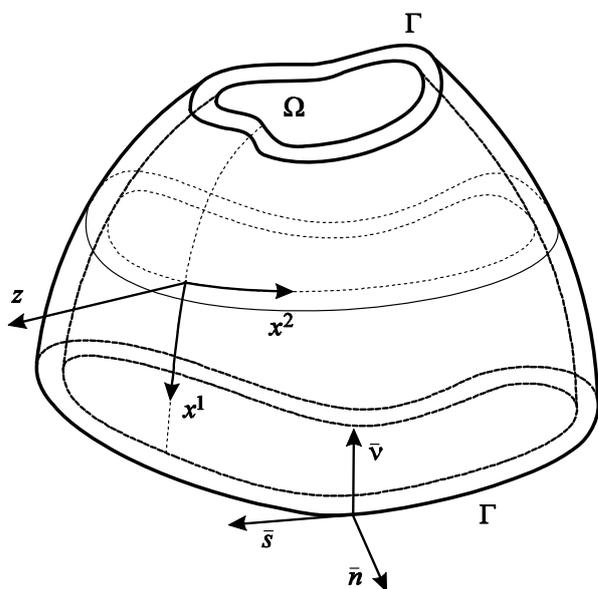


Рис. 1.5. Криволинейные системы координат, связанные с линиями кривизн внутренней поверхности оболочки и ее контура.

Рассмотрим многослойную композитную оболочку толщины h , собранную из m упругих армированных слоев постоянной толщины (рис. 1.5). В качестве отсчетной поверхности Ω выберем внутреннюю лицевую поверхность оболочки. Введем ортогональную систему координат x^1, x^2 так, чтобы координатные линии совпадали с линиями кривизны

поверхности. Считаем A_1, A_2 – параметрами Ламе этой системы; R_1, R_2 – радиусами кривизны нормальных сечений в направлении координатных линий. Выражения для параметров Ламе пространственной системы координат x^1, x^2, z , нормально связанной с поверхностью Ω следующие [30] ($\alpha = 1, 2$)

$$H_\alpha = A_\alpha(1 + z/R_\alpha), H_3 = 1.$$

В этой системе уравнения поверхностей раздела k -го и $(k + 1)$ -го слоев, где $k = 1, \dots, m - 1$, запишутся в виде

$$z = h_k, \quad 0 = h_0 < h_1 < \dots < h_m = h. \quad (1.2.1)$$

При исследовании колебаний многослойной оболочки используем неклассическую модель Андреева-Немировского [30], считая внутреннюю и внешнюю поверхность свободной от касательных напряжений. Гипотезу о законе распределения поперечных компонент тензора деформации по толщине оболочки принимаем в виде:

$$\gamma_{\alpha 3}^{0,(k)} = \frac{f'(z)\pi_\alpha}{G_{\alpha 3}^{0,(k)}}, \quad \varepsilon_{33}^{0,(k)} = 0.$$

Здесь $\gamma_{\alpha 3}^{0,(k)}$, $\varepsilon_{33}^{0,(k)}$, $G_{\alpha 3}^{0,(k)}$ – компоненты тензоров деформации и поперечной сдвиговой жесткости, определенные на лицевой поверхности Ω и в k -ом слое оболочки. Кинематическими характеристиками π_α учитывается наличие поперечных сдвигов в оболочке. А непрерывно дифференцируемая функция $f(z)$, удовлетворяет условиям

$$f'(0) = f'(h) = 0$$

и принимается в виде (см. [30])

$$f(z) = z^{\alpha+1} - \frac{\alpha+1}{\alpha} h z^\alpha. \quad (1.2.2)$$

В частности, при $\alpha = 2$ получаем следующую форму функции:

$$f(z) = z^3 - 1.5 h z^2. \quad (1.2.3)$$

Определение этой функции подробно обсуждалось в [30], где отмечено, что выбор (1.2.3) не вносит в расчет недопустимых погрешностей. Исследование влияния параметра α на спектр частот сферического пояса представлено в четвертой главе.

Замкнутая система уравнений динамики слоистой оболочки включает в себя следующие группы зависимостей [30] ($k = 1, \dots, m$ – номер слоя; $\alpha, \beta = 1, 2, \alpha \neq \beta$):

— соотношения упругости:

$$\sigma_{\alpha\alpha}^{(k)} = a_{\alpha\alpha} \varepsilon_{\alpha\alpha}^{(k)} + a_{\alpha\beta} \varepsilon_{\beta\beta}^{(k)}, \sigma_{\alpha\beta}^{(k)} = a_{33} \varepsilon_{\alpha\beta}^{(k)}, \tau_{\alpha 3}^{(k)} = G_{\alpha 3} \gamma_{\alpha 3}^{(k)}. \quad (1.2.4)$$

— закон распределения физических составляющих вектора перемещения по толщине пакета слоев:

$$v_{\alpha}^{(k)} = \left(1 + \frac{z}{R_{\alpha}}\right) \cdot u_{\alpha} - \frac{z}{A_{\alpha}} \frac{\partial w}{\partial x^{\alpha}} + \mu_{\alpha\alpha}^{(k)} \pi_{\alpha}, v_3^{(k)} = w. \quad (1.2.5)$$

— соотношения деформации–перемещения:

$$\gamma_{\alpha 3}^{(k)} = \frac{f'(z) \pi_{\alpha}}{G_{\alpha 3}^{(k)}}, \varepsilon_{33}^{(k)} = 0, \quad (1.2.6)$$

$$\begin{aligned} \varepsilon_{\alpha\alpha}^{(k)} &= \frac{1}{H_{\alpha}} \left\{ \frac{\partial \left[\left(1 + \frac{z}{R_{\alpha}}\right) u_{\alpha} \right]}{\partial x^{\alpha}} + \left(1 + \frac{z}{R_{\beta}}\right) \frac{1}{A_{\beta}} \frac{\partial A_{\alpha}}{\partial x^{\beta}} u_{\beta} - z \left[\frac{\partial}{\partial x^{\alpha}} \left(\frac{1}{A_{\alpha}} \frac{\partial w}{\partial x^{\alpha}} \right) + \right. \right. \\ &+ \left. \frac{1}{A_{\beta}^2} \frac{\partial A_{\alpha}}{\partial x^{\beta}} \frac{\partial w}{\partial x^{\beta}} \right] + \frac{\partial \left(\mu_{\alpha\alpha}^{(k)} \pi_{\alpha} \right)}{\partial x^{\alpha}} + \frac{1}{A_{\beta}} \frac{\partial A_{\alpha}}{\partial x^{\beta}} \mu_{\beta\beta}^{(k)} \pi_{\beta} + \frac{A_{\alpha}}{R_{\alpha}} w \left. \right\} + \frac{1}{2} \left(\frac{u_{\alpha}}{R_{\alpha}} - \frac{1}{A_{\alpha}} \frac{\partial w}{\partial x^{\alpha}} \right)^2, \\ 2\varepsilon_{12}^{(k)} &= \frac{1}{H_1} \left\{ \frac{\partial \left[\left(1 + \frac{z}{R_2}\right) u_2 \right]}{\partial x^1} - \left(1 + \frac{z}{R_1}\right) \frac{1}{A_2} \frac{\partial A_1}{\partial x^2} u_1 - z \left[\frac{\partial}{\partial x^1} \left(\frac{1}{A_2} \frac{\partial w}{\partial x^2} \right) - \right. \right. \\ &- \left. \frac{1}{A_1 A_2} \frac{\partial A_1}{\partial x^2} \frac{\partial w}{\partial x^1} \right] + \frac{\partial \left(\mu_{22}^{(k)} \pi_2 \right)}{\partial x^1} - \frac{1}{A_2} \frac{\partial A_1}{\partial x^2} \mu_{11}^{(k)} \pi_1 \left. \right\} + \frac{1}{H_2} \left\{ \frac{\partial \left[\left(1 + \frac{z}{R_1}\right) u_1 \right]}{\partial x^2} - \right. \\ &- \left. \left(1 + \frac{z}{R_2}\right) \frac{1}{A_1} \frac{\partial A_2}{\partial x^1} u_2 - z \left[\frac{\partial}{\partial x^2} \left(\frac{1}{A_1} \frac{\partial w}{\partial x^1} \right) - \frac{1}{A_1 A_2} \frac{\partial A_2}{\partial x^1} \frac{\partial w}{\partial x^2} \right] + \right. \\ &+ \left. \frac{\partial \left(\mu_{11}^{(k)} \pi_1 \right)}{\partial x^2} - \frac{1}{A_1} \frac{\partial A_2}{\partial x^1} \mu_{22}^{(k)} \pi_2 \right\} + \left(\frac{u_1}{R_1} - \frac{1}{A_1} \frac{\partial w}{\partial x^1} \right) \left(\frac{u_2}{R_2} - \frac{1}{A_2} \frac{\partial w}{\partial x^2} \right). \end{aligned}$$

— выражение физических составляющих обобщенных усилий и моментов оболочки через физические составляющие компонент тензора напряжений в ее слоях ($\alpha, \beta, \omega = 1, 2, \alpha \neq \omega$):

$$[T_{\alpha\beta}, M_{\alpha\beta}, S_{\alpha\beta}] = \sum_{k=1}^m \int_{h_{k-1}}^{h_k} \sigma_{\alpha\beta}^{(k)} [1, z, \mu_{\beta\beta}^{(k)}] (1 + z/R_\omega) dz, \quad (1.2.7)$$

$$\begin{aligned} Q_\alpha &= \sum_{k=1}^m \int_{h_{k-1}}^{h_k} \left\{ \sigma_{\alpha\alpha}^{(k)} \frac{1}{A_\alpha} \frac{\partial \mu_{\alpha\alpha}^{(k)}}{\partial x^\alpha} + \sigma_{\alpha\omega}^{(k)} \frac{(\mu_{\omega\omega}^{(k)} - \mu_{\alpha\alpha}^{(k)})}{A_\alpha A_\omega} \frac{\partial A_\alpha}{\partial x^\omega} \right\} (1 + z/R_\omega) dz + \\ &+ \sum_{k=1}^m \int_{h_{k-1}}^{h_k} \left\{ \sigma_{\omega\alpha}^{(k)} \frac{1}{A_\omega} \frac{\partial \mu_{\alpha\alpha}^{(k)}}{\partial x^\omega} - \sigma_{\omega\omega}^{(k)} \frac{(\mu_{\omega\omega}^{(k)} - \mu_{\alpha\alpha}^{(k)})}{A_\alpha A_\omega} \frac{\partial A_\omega}{\partial x^\alpha} \right\} (1 + z/R_\alpha) dz + \\ &+ \sum_{k=1}^m \int_{h_{k-1}}^{h_k} \frac{\tau_{3\alpha}^{(k)} f'(z)}{G_{\alpha 3}^{(k)}} \left(1 + \frac{z}{R_1}\right) \left(1 + \frac{z}{R_2}\right) dz, \quad H_{\beta\alpha} = T_{\alpha\beta} + M_{\alpha\beta}/R_\alpha. \end{aligned}$$

— выражения для даламберовых сил инерции:

$$[\ddot{X}_\alpha, \ddot{Y}_\alpha, \ddot{Z}_\alpha] = \sum_{k=1}^m \int_{h_{k-1}}^{h_k} \rho^{(k)} \ddot{v}_\alpha^{(k)} [1, z, \mu_{\alpha\alpha}^{(k)}] \left(1 + \frac{z}{R_1}\right) \left(1 + \frac{z}{R_2}\right) dz, \quad (1.2.8)$$

$$\ddot{I} = \dot{w} \sum_{k=1}^m \int_{h_{k-1}}^{h_k} \rho^{(k)} \left(1 + \frac{z}{R_1}\right) \left(1 + \frac{z}{R_2}\right) dz.$$

— выражения для компонент тензора $\mu^{(k)}$: (1.2.9)

$$\mu_{\alpha\alpha}^{(k)} = (1 + z/R_\alpha) \left(\int_{h_{k-1}}^z \frac{f'(t) dt}{G_{\alpha 3}^{(k)} (1 + t/R_\alpha)} + (1 - \delta_{k1}) \sum_{j=1}^{k-1} \int_{h_{j-1}}^{h_j} \frac{f'(t) dt}{G_{\alpha 3}^{(j)} (1 + t/R_\alpha)} \right),$$

$$\mu_{\alpha\beta}^{(k)} = 0.$$

— дифференциальные нелинейные уравнения движения элемента слоистой оболочки: (1.2.10)

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial A_2 T_{11}}{\partial x^1} - \frac{\partial A_2}{\partial x^1} T_{22} + \frac{\partial A_1 T_{21}}{\partial x^2} + \frac{\partial A_1}{\partial x^2} T_{12} + \frac{1}{R_1} \left(\frac{\partial A_2 M_{11}}{\partial x^1} - \frac{\partial A_2}{\partial x^1} M_{22} + \frac{\partial A_1 M_{21}}{\partial x^2} + \right. \\
& \left. + \frac{\partial A_1}{\partial x^2} M_{12} \right) - \frac{A_1 A_2}{R_1} \left(H_{11} \left[\frac{u_1}{R_1} - \frac{1}{A_1} \frac{\partial w}{\partial x^1} \right] + H_{12} \left[\frac{u_2}{R_2} - \frac{1}{A_2} \frac{\partial w}{\partial x^2} \right] + R_1 \dot{X}_1 + \dot{Y}_1 \right) = 0, \\
& \frac{\partial A_1 T_{22}}{\partial x^2} - \frac{\partial A_1}{\partial x^2} T_{11} + \frac{\partial A_2 T_{12}}{\partial x^1} + \frac{\partial A_2}{\partial x^1} T_{21} + \frac{1}{R_2} \left(\frac{\partial A_1 M_{22}}{\partial x^2} - \frac{\partial A_1}{\partial x^2} M_{11} + \frac{\partial A_2 M_{12}}{\partial x^1} + \right. \\
& \left. + \frac{\partial A_2}{\partial x^1} M_{21} \right) - \frac{A_1 A_2}{R_2} \left(H_{22} \left[\frac{u_2}{R_2} - \frac{1}{A_2} \frac{\partial w}{\partial x^2} \right] + H_{21} \left[\frac{u_1}{R_1} - \frac{1}{A_1} \frac{\partial w}{\partial x^1} \right] + R_2 \dot{X}_2 + \dot{Y}_2 \right) = 0, \\
& \frac{T_{11}}{R_1} + \frac{T_{22}}{R_2} - \frac{1}{A_1 A_2} \left\{ \frac{\partial}{\partial x^1} \frac{1}{A_1} \left[\frac{\partial A_2 M_{11}}{\partial x^1} - \frac{\partial A_2}{\partial x^1} M_{22} + \frac{\partial A_1 M_{21}}{\partial x^2} + \frac{\partial A_1}{\partial x^2} M_{12} \right] + \right. \\
& \quad \left. + \frac{\partial}{\partial x^2} \frac{1}{A_2} \left[\frac{\partial A_1 M_{22}}{\partial x^2} - \frac{\partial A_1}{\partial x^2} M_{11} + \frac{\partial A_2 M_{12}}{\partial x^1} + \frac{\partial A_2}{\partial x^1} M_{21} \right] \right\} + \\
& \quad + \frac{1}{A_1 A_2} \left\{ \frac{\partial}{\partial x^1} A_2 \left(H_{11} \left[\frac{u_1}{R_1} - \frac{1}{A_1} \frac{\partial w}{\partial x^1} \right] + H_{12} \left[\frac{u_2}{R_2} - \frac{1}{A_2} \frac{\partial w}{\partial x^2} \right] \right) + \right. \\
& \quad \left. + \frac{\partial}{\partial x^2} A_1 \left(H_{21} \left[\frac{u_1}{R_1} - \frac{1}{A_1} \frac{\partial w}{\partial x^1} \right] + H_{22} \left[\frac{u_2}{R_2} - \frac{1}{A_2} \frac{\partial w}{\partial x^2} \right] \right) \right\} + \\
& \quad + \dot{I} + \frac{1}{A_1 A_2} \left(\frac{\partial A_2 \dot{Y}_1}{\partial x^1} + \frac{\partial A_1 \dot{Y}_2}{\partial x^2} \right) + \left(\sigma_{33}^0 - \sigma_{33}^h \right) = 0, \\
& \frac{\partial A_2 S_{11}}{\partial x^1} - \frac{\partial A_2}{\partial x^1} S_{22} + \frac{\partial A_1 S_{21}}{\partial x^2} + \frac{\partial A_1}{\partial x^2} S_{12} - A_1 A_2 Q_1 - A_1 A_2 \dot{Z}_1 = 0, \\
& \frac{\partial A_1 S_{22}}{\partial x^2} - \frac{\partial A_1}{\partial x^2} S_{11} + \frac{\partial A_2 S_{12}}{\partial x^1} + \frac{\partial A_2}{\partial x^1} S_{21} - A_1 A_2 Q_2 - A_1 A_2 \dot{Z}_2 = 0.
\end{aligned}$$

Система (1.2.4)–(1.2.9) описывает процесс нелинейного деформирования многослойной упругой композитной оболочки с конечной сдвиговой жесткостью. Подстановка в (1.2.9) соотношений (1.2.4)–(1.2.8) приводит к системе пяти квазилинейных дифференциальных уравнений в частных производных двенадцатого порядка с двумя независимыми переменными

x^1, x^2 относительно пяти обобщенных перемещений $u_1, u_2, w, \pi_1, \pi_2$. Краевые условия, замыкающие описанную систему, требуют задания на контуре Γ шести величин, альтернативно выбираемых из шести пар [30]:

$$\begin{aligned} & (T_{vs} - k_s M_{vs}, u_s), \quad (T_{vv} + \tau_s M_{vs}, u_v), \quad (M_{vv}, \eta_v), \quad (1.2.11) \\ & \left(v_\alpha \nabla_\beta M^{\alpha\beta} + \frac{\partial M_{vs}}{\partial l_s} - H_{vs} \eta_s - H_{vv} \eta_v - \dot{Y}_v, w \right), \quad (S_{vs}, \pi_s), \quad (S_{vv}, \pi_v). \end{aligned}$$

Здесь и ниже через $u_s, u_v, \dots, T_{vs}, T_{vv}, \dots$ обозначены физические составляющие соответствующих векторов и тензоров в ортонормированном координатном базисе $\{v, s, n\}$, связанном с контуром Γ [30]. В (1.2.11) s – касательный вектор, v – вектор тангенциальной внешней нормали, n – вектор внешней нормали, между которыми выполняется соотношение $v \times s = n$ (рис. 1.5). Через η_α обозначен угол поворота нормали в результате деформации в плоскости (x^α, z) .

Дифференциальные уравнения (1.2.4)–(1.2.11) описывают динамическое поведение многослойной оболочки при среднем изгибе (см. [243]), и пригодны для анализа широкого класса композитных оболочек при различных условиях нагружения и закрепления. Динамическое поведение оболочек при малых прогибах можно исследовать на основе линейризованной системы уравнений, получающейся из (1.2.4)–(1.2.11) в результате пренебрежения нелинейными слагаемыми.

Выписанные соотношения допускают ряд предельных переходов [30]. Отметим лишь те, которые использовались в дальнейшем при решении задач и установлении границ применимости теории.

Например, к уравнениям классической теории оболочек приводит предельный переход

$$G_{\alpha 3}^k \rightarrow \infty. \quad (1.2.12)$$

Действительно, при реализации (1.2.12) в системе (1.2.4)–(1.2.11) обращаются в нуль слагаемые, описывающие поперечные деформации, в следствие этого, одна часть уравнений и условий системы удовлетворяется тождественно, а другая совпадает с соответствующими зависимостями классической теории оболочек.

Ниже погрешность δ расчетных значений, возникающая в результате неучета поперечных сдвиговых деформаций, оценивалась по формуле [86]

$$\delta = (a - z) / z, \quad (1.2.13)$$

где a – значение величины, рассчитанное в рамках классической модели и рассматриваемое как приближение значения величины z , вычисленной по уточненной теории.

1.2.1. УРАВНЕНИЯ СВОБОДНЫХ КОЛЕБАНИЙ

Используя систему (1.2.4)–(1.2.11), получим уравнения, описывающие свободные установившиеся гармонические колебания тонких многослойных анизотропных оболочек. Методика вывода таких уравнений подробно описана в литературе [30, 67, 128 и другие] и заключается в следующем:

1. проводится линеаризация нелинейных уравнений динамики;
2. оболочка считается свободной от поверхностных и контурных нагрузок;
3. осуществляется замена оператора дифференцирования по временной переменной t на квадрат частоты собственных колебаний ω :

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \rightarrow -\omega^2.$$

Считаем также оболочку достаточно тонкой так, что можно пренебречь слагаемыми h/R_α по сравнению с 1, т. е. $h/R_\alpha \ll 1$. Здесь R_α – радиусы главных кривизн $\alpha = 1, 2$. Таким образом, свободные колебания тонких оболочек определяются следующими зависимостями ($\alpha, \beta = 1, 2$):

— уравнения состояния:

$$\sigma_{\alpha\alpha}^{(k)} = a_{\alpha\alpha} \varepsilon_{\alpha\alpha}^{(k)} + a_{\alpha\beta} \varepsilon_{\beta\beta}^{(k)}, \sigma_{\alpha\beta}^{(k)} = a_{33} \varepsilon_{\alpha\beta}^{(k)}, \tau_{\alpha 3}^{(k)} = G_{\alpha 3} \gamma_{\alpha 3}^{(k)}. \quad (1.2.14)$$

— закон распределения физических составляющих вектора перемещения по толщине пакета слоев:

$$v_{\alpha}^{(k)} = u_{\alpha} - \frac{z}{A_{\alpha}} \frac{\partial w}{\partial x^{\alpha}} + \mu_{\alpha\alpha}^{(k)} \pi_{\alpha}, v_3^{(k)} = w. \quad (1.2.15);$$

— соотношения деформации–перемещения:

$$\gamma_{\alpha 3}^{(k)} = \frac{f'(z) \pi_{\alpha}}{G_{\alpha 3}^{(k)}}, \varepsilon_{33}^{(k)} = 0, \quad (1.2.16)$$

$$\begin{aligned} \varepsilon_{\alpha\alpha}^{(k)} &= \frac{1}{A_{\alpha}} \left\{ \frac{\partial u_{\alpha}}{\partial x^{\alpha}} + \frac{1}{A_{\beta}} \frac{\partial A_{\alpha}}{\partial x^{\beta}} u_{\beta} - z \left[\frac{\partial}{\partial x^{\alpha}} \left(\frac{1}{A_{\alpha}} \frac{\partial w}{\partial x^{\alpha}} \right) + \frac{1}{A_{\beta}^2} \frac{\partial A_{\alpha}}{\partial x^{\beta}} \frac{\partial w}{\partial x^{\beta}} \right] + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\partial(\mu_{\alpha\alpha}^{(k)} \pi_{\alpha})}{\partial x^{\alpha}} + \frac{1}{A_{\beta}} \frac{\partial A_{\alpha}}{\partial x^{\beta}} \mu_{\beta\beta}^{(k)} \pi_{\beta} + \frac{A_{\alpha}}{R_{\alpha}} w \right\}, \\ 2\varepsilon_{12}^{(k)} &= \frac{1}{A_1} \left\{ \frac{\partial u_2}{\partial x^1} - \frac{1}{A_2} \frac{\partial A_1}{\partial x^2} u_1 - z \left[\frac{\partial}{\partial x^1} \left(\frac{1}{A_2} \frac{\partial w}{\partial x^2} \right) - \frac{1}{A_1 A_2} \frac{\partial A_1}{\partial x^2} \frac{\partial w}{\partial x^1} \right] + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\partial(\mu_{22}^{(k)} \pi_2)}{\partial x^1} - \frac{1}{A_2} \frac{\partial A_1}{\partial x^2} \mu_{11}^{(k)} \pi_1 \right\} + \frac{1}{A_2} \left\{ \frac{\partial u_1}{\partial x^2} - \frac{1}{A_1} \frac{\partial A_2}{\partial x^1} u_2 - \right. \\ &\quad \left. - z \left[\frac{\partial}{\partial x^2} \left(\frac{1}{A_1} \frac{\partial w}{\partial x^1} \right) - \frac{1}{A_1 A_2} \frac{\partial A_2}{\partial x^1} \frac{\partial w}{\partial x^2} \right] + \frac{\partial(\mu_{11}^{(k)} \pi_1)}{\partial x^2} - \frac{1}{A_1} \frac{\partial A_2}{\partial x^1} \mu_{22}^{(k)} \pi_2 \right\}. \end{aligned}$$

— выражение физических составляющих обобщенных усилий и моментов через физические составляющие тензора напряжений ($\omega = 1, 2; \alpha \neq \omega$):

$$[T_{\alpha\beta}, M_{\alpha\beta}, S_{\alpha\beta}] = \sum_{k=1}^m \int_{h_{k-1}}^{h_k} \sigma_{\alpha\beta}^{(k)} [1, z, \mu_{\beta\beta}^{(k)}] dz, \quad (1.2.17)$$

$$Q_\alpha = \sum_{k=1}^m \int_{h_{k-1}}^{h_k} \left\{ \sigma_{\alpha\alpha}^{(k)} \frac{1}{A_\alpha} \frac{\partial \mu_{\alpha\alpha}^{(k)}}{\partial x^\alpha} + \sigma_{\alpha\omega}^{(k)} \frac{(\mu_{\omega\omega}^{(k)} - \mu_{\alpha\alpha}^{(k)})}{A_\alpha A_\omega} \frac{\partial A_\alpha}{\partial x^\omega} \right\} dz +$$

$$+ \sum_{k=1}^m \int_{h_{k-1}}^{h_k} \left\{ \sigma_{\omega\alpha}^{(k)} \frac{1}{A_\omega} \frac{\partial \mu_{\alpha\alpha}^{(k)}}{\partial x^\omega} - \sigma_{\omega\omega}^{(k)} \frac{(\mu_{\omega\omega}^{(k)} - \mu_{\alpha\alpha}^{(k)})}{A_\alpha A_\omega} \frac{\partial A_\omega}{\partial x^\alpha} \right\} dz + \sum_{k=1}^m \int_{h_{k-1}}^{h_k} \frac{\tau_{3\alpha}^{(k)} f'(z)}{G_{\alpha 3}^{(k)}} dz.$$

— выражения интегральных характеристик даламберовых сил инерции:

$$[X_\alpha, Y_\alpha, Z_\alpha] = \sum_{k=1}^m \int_{h_{k-1}}^{h_k} \rho^{(k)} v_\alpha^{(k)} [1, z, \mu_{\alpha\alpha}^{(k)}] dz, \quad I = \dot{w} \sum_{k=1}^m \int_{h_{k-1}}^{h_k} \rho^{(k)} dz. \quad (1.2.18)$$

— выражения для компонент тензора $\mu^{(k)}$:

$$\mu_{\alpha\alpha}^{(k)} = \int_{h_{k-1}}^z \frac{f'(t) dt}{G_{\alpha 3}^{(k)}} + (1 - \delta_{k1}) \sum_{j=1}^{k-1} \int_{h_{j-1}}^{h_j} \frac{f'(t) dt}{G_{\alpha 3}^{(j)}}. \quad (1.2.19)$$

— дифференциальные уравнения свободных колебаний:

$$\frac{\partial A_2 T_{11}}{\partial x^1} - \frac{\partial A_2}{\partial x^1} T_{22} + \frac{\partial A_1 T_{21}}{\partial x^2} + \frac{\partial A_1}{\partial x^2} T_{12} + \omega^2 A_1 A_2 X_1 = 0, \quad (1.2.20)$$

$$\frac{\partial A_1 T_{22}}{\partial x^2} - \frac{\partial A_1}{\partial x^2} T_{11} + \frac{\partial A_2 T_{12}}{\partial x^1} + \frac{\partial A_2}{\partial x^1} T_{21} + \omega^2 A_1 A_2 X_2 = 0,$$

$$\frac{T_{11}}{R_1} + \frac{T_{22}}{R_2} - \frac{1}{A_1 A_2} \left\{ \frac{\partial}{\partial x^1} \frac{1}{A_1} \left[\frac{\partial A_2 M_{11}}{\partial x^1} - \frac{\partial A_2}{\partial x^1} M_{22} + \frac{\partial A_1 M_{21}}{\partial x^2} + \frac{\partial A_1}{\partial x^2} M_{12} \right] + \right.$$

$$\left. + \frac{\partial}{\partial x^2} \frac{1}{A_2} \left[\frac{\partial A_1 M_{22}}{\partial x^2} - \frac{\partial A_1}{\partial x^2} M_{11} + \frac{\partial A_2 M_{12}}{\partial x^1} + \frac{\partial A_2}{\partial x^1} M_{21} \right] \right\} =$$

$$= \omega^2 \left[I + \frac{1}{A_1 A_2} \left(\frac{\partial A_2 Y_1}{\partial x^1} + \frac{\partial A_1 Y_2}{\partial x^2} \right) \right],$$

$$\frac{\partial A_2 S_{11}}{\partial x^1} - \frac{\partial A_2}{\partial x^1} S_{22} + \frac{\partial A_1 S_{21}}{\partial x^2} + \frac{\partial A_1}{\partial x^2} S_{12} - A_1 A_2 Q_1 + \omega^2 A_1 A_2 Z_1 = 0,$$

$$\frac{\partial A_1 S_{22}}{\partial x^2} - \frac{\partial A_1}{\partial x^2} S_{11} + \frac{\partial A_2 S_{12}}{\partial x^1} + \frac{\partial A_2}{\partial x^1} S_{21} - A_1 A_2 Q_2 + \omega^2 A_1 A_2 Z_2 = 0.$$

Система (1.2.14)–(1.2.20) описывает свободные установившиеся гармонические колебания тонких многослойных оболочек. Она должна быть дополнена контурными условиями, которые с учетом указанных выше преобразований становятся однородными, а соответствующие пары принимают вид:

$$\begin{aligned} & (T_{vs} - k_s M_{vs}, u_s), \quad (T_{ss}, u_v), \quad (M_{vv}, \eta_v), \quad (S_{vs}, \pi_s), \quad (S_{vv}, \pi_v), \\ & \left(v_\alpha \nabla_\beta M^{\alpha\beta} + \frac{\partial M_{vs}}{\partial l_s} + \omega^2 Y_v, w \right). \end{aligned} \quad (1.2.21)$$

Таким образом, изучение спектра собственных частот и соответствующих им форм колебаний сводится к поиску и анализу совокупности собственных значений и собственных векторов системы дифференциальных уравнений в частных производных. Метод решения таких задач представлен в § 1.4.

1.2.2. УРАВНЕНИЯ СВОБОДНЫХ КОЛЕБАНИЙ ОБОЛОЧЕК ВРАЩЕНИЯ

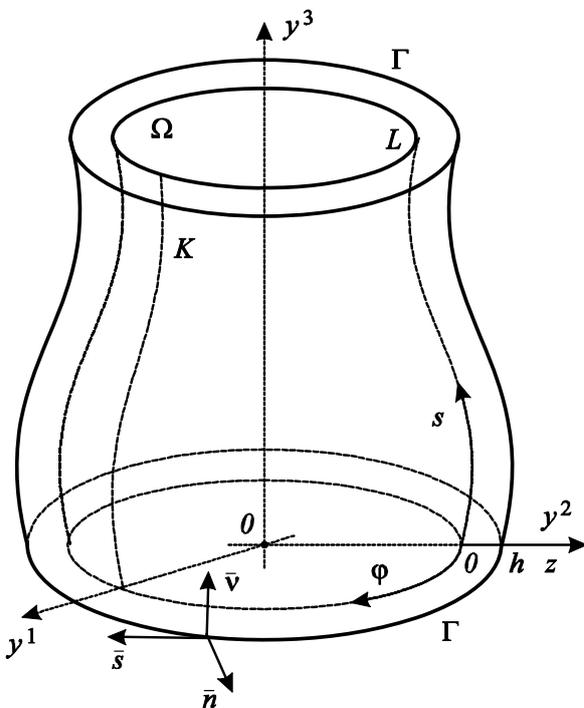


Рис. 1.6. Оболочка вращения и связанная с ее поверхностью криволинейная система координат.

Рассмотрим слоистую оболочку вращения толщины h (рис. 1.6), собранную из m упругих армированных ортотропных слоев постоянной толщины. Будем считать меридиан ее поверхности приведения K гладкой кривой (в § 4 главы 2 это условие будет уточнено). В качестве гауссовых координат внутренней поверхности Ω [86], принимаем параметр длины дуги $s = x^1$ и угловую координату $\varphi = x^2$. Пространственную систему получа-

ем, вводя нормальную координату z , отсчитываемую от поверхности приведения. Везде ниже считаем, что направление осей ортотропии (армирования) совпадает с направлением координатных осей s, φ ; интенсивность армирования (1.1.1) не зависит от угловой координаты φ , однако может изменяться вдоль образующей s . Запишем в переменных s, φ, z лишь те соотношения задачи о свободных колебаниях, вид которых инвариантен относительно формы оболочки (оставшиеся зависимости будут приведены в соответствующих главах):

— уравнения состояния

$$\begin{aligned}\sigma_{ss}^{(k)} &= a_{11}\varepsilon_{ss}^{(k)} + a_{12}\varepsilon_{\varphi\varphi}^{(k)}, \quad \sigma_{\varphi\varphi}^{(k)} = a_{12}\varepsilon_{ss}^{(k)} + a_{22}\varepsilon_{\varphi\varphi}^{(k)}, \\ \sigma_{s\varphi}^{(k)} &= \sigma_{\varphi s}^{(k)} = a_{33}\varepsilon_{s\varphi}^{(k)}, \quad \tau_{sz}^{(k)} = G_{13}\gamma_{sz}^{(k)}, \quad \tau_{\varphi z}^{(k)} = G_{23}\gamma_{\varphi z}^{(k)}.\end{aligned}\quad (1.2.22)$$

— выражения интегральных характеристик даламберовых сил инерции:

$$[X_s, Y_s, Z_s] = \sum_{k=1}^m \int_{h_{k-1}}^{h_k} \rho_{(k)} v_s^{(k)} [1, z, \mu_{11}^{(k)}] dz, \quad (1.2.23)$$

$$[X_\varphi, Y_\varphi, Z_\varphi] = \sum_{k=1}^m \int_{h_{k-1}}^{h_k} \rho_{(k)} v_\varphi^{(k)} [1, z, \mu_{22}^{(k)}] dz, \quad I = w \sum_{k=1}^m \int_{h_{k-1}}^{h_k} \rho_{(k)} dz.$$

— выражения для компонент тензора $\mu^{(k)}$ ($\alpha, \beta = 1, 2$):

$$\mu_{\alpha\beta}^{(k)} = \delta_{\alpha\beta} \left\{ \frac{f(z) - f(h_{k-1})}{G_{\alpha 3}^{(k)}} + (1 - \delta_{k1}) \sum_{j=1}^{k-1} \left(\frac{f(h_j) - f(h_{j-1})}{G_{\alpha 3}^{(j)}} \right) \right\}. \quad (1.2.24)$$

Заметим также, что для оболочек вращения контур Γ описывается уравнением $s = \text{const}$. Следовательно, направление касательного вектора совпадает с направлением координатной оси φ , а вектор тангенциальной нормали ν определяется вдоль образующей s (рис. 1.6). В результате, кинематические и силовые характеристики, альтернативно обращаемые в

нуль на кромочных поверхностях оболочки, и объединенные в соответствующие пары, записываются в виде

$$\begin{aligned} & (T_{s\varphi}, u_\varphi), (T_{ss}, u_s), \left(M_{ss}, \frac{u_s}{R_1} - \frac{1}{A_1} \frac{\partial w}{\partial s} \right), (S_{s\varphi}, \pi_\varphi), (S_{ss}, \pi_s), \\ & \left(\frac{\partial A_2 M_{ss}}{\partial s} - \frac{\partial A_2}{\partial s} M_{\varphi\varphi} + 2 \frac{\partial A_1 M_{s\varphi}}{\partial \varphi} + \omega^2 A_2 Y_s, w \right). \end{aligned} \quad (1.2.25)$$

С целью использовать векторно-матричную запись введем безразмерную независимую переменную x и безразмерный вектор-столбец кинематических и силовых характеристик напряженно-деформированного состояния оболочки $y = [y_1, \dots, y_{12}]^T$:

$$x = \frac{s}{L}, \frac{\partial}{\partial s} = \frac{1}{L} \frac{\partial}{\partial x}, \gamma = \frac{h}{R}, \delta = \frac{L}{R}, \rho_k = \frac{R^2}{E_1^c} \rho_k, \quad (1.2.26)$$

$$w = h \cdot y_1, y_2 = \frac{\partial y_1}{\partial x}, u_s = R \cdot y_3, u_\varphi = R \cdot y_4, \pi_s = \frac{E_1^c R}{h^{\alpha+1}} y_5, u_\varphi = \frac{E_1^c R}{h^{\alpha+1}} y_6,$$

$$\frac{\partial A_2 M_{ss}}{\partial s} - \frac{\partial A_2}{\partial s} M_{\varphi\varphi} + 2 \frac{\partial A_1 M_{s\varphi}}{\partial \varphi} + \omega^2 A_2 Y_s = h^2 E_1^c y_7,$$

$$A_2 M_{ss} = h^2 R E_1^c y_8, A_2 T_{ss} = h R E_1^c y_9, A_2 T_{s\varphi} = h R E_1^c y_{10},$$

$$A_2 S_{ss} = h^{\alpha+2} R \cdot y_{11}, A_2 S_{s\varphi} = h^{\alpha+2} R \cdot y_{12}.$$

В переменных (1.2.26), задача принимает вид:

$$A(x, D_\varphi) \frac{\partial y}{\partial x} = B(x, D_\varphi) y + \omega^2 C(x, D_\varphi) y, \quad (1.2.27)$$

$$My(0, \varphi) = O_{6 \times 1}, Ny(1, \varphi) = O_{6 \times 1}, y(x, \varphi) = y(x, \varphi + 2\pi).$$

В (1.2.27) матрицы A, B, C имеют 12 порядок, их элементы – полиномы от дифференциального оператора D_φ с коэффициентами, переменными относительно x ; M, N – 6×12 матрицы известного строения; $O_{6 \times 1}$ – 6-мерный нулевой вектор; ω – частотный параметр. Выражения для этих матриц весьма громоздки и в общем виде не приводятся. В следующих

главах они будут выписаны для оболочек конкретных форм. Отметим также, что в случае составной оболочки, задача (1.2.27) должна быть дополнена условиями сопряжения (см. пятую главу).

Итак, изучение собственных частот и собственных форм колебаний оболочек вращения сводится к проблеме собственных значений и собственных векторов системы дифференциальных уравнений в частных производных (1.2.27).

1.2.3. УРАВНЕНИЯ ДИНАМИЧЕСКОЙ УСТОЙЧИВОСТИ

В параграфе сформулирована система динамической устойчивости слоистых анизотропных оболочек в системе координат, связанной с линиями кривизн поверхности приведения.

Уравнения динамической устойчивости оболочек могут быть получены на основе нелинейных уравнений движения (1.2.4)–(1.2.11). Методика вывода изложена в [30, 67, 80 и другие] и заключается в том, что рассматриваются два бесконечно близких динамических состояния оболочки: основное и возмущенное. Основное (невозмущенное) движение

$$\tilde{u}_{\alpha}, \dots, \tilde{\varepsilon}_{\alpha\beta}, \dots, \tilde{T}_{\alpha\beta}, \dots, \tilde{M}_{\alpha\beta}, \dots \quad (1.2.28)$$

возникает в оболочке в результате действия внешней поверхностной гармонической (по времени) нагрузки $F_{\alpha}(t, x^1, x^2)$. Причем при определенных сочетаниях параметров (статической и динамической амплитуд, а также частоты воздействия) рассматриваемое состояние (1.2.28) может оказаться неустойчивым по Ляпунову [80, 158, 173, другие]. Обозначая через $u_{\alpha}, \varepsilon_{\alpha\beta}, T_{\alpha\beta}, M_{\alpha\beta}, \dots$ их бесконечно малые вариации, запишем характеристики возмущенного состояния в виде:

$$\tilde{u}_{\alpha} + u_{\alpha}, \dots, \tilde{\varepsilon}_{\alpha\beta} + \varepsilon_{\alpha\beta}, \dots, \tilde{T}_{\alpha\beta} + T_{\alpha\beta}, \dots, \tilde{M}_{\alpha\beta} + M_{\alpha\beta}, \dots \quad (1.2.29)$$

Поскольку оба состояния (1.2.28), (1.2.29) удовлетворяют уравнениям и краевым условиям нелинейной задачи (1.2.4)–(1.2.11), то вычитая из уравнений возмущенного движения соответствующие им уравнения невозмущенного движения и опуская квадратичные по вариациям величины, как бесконечно малые высшего порядка, получаем линеаризованную систему дифференциальных уравнений динамической устойчивости в вариациях. Выполнение этой процедуры для тонких ортотропных многослойных оболочек приводит к системе, состоящей из следующих зависимостей:

— физические соотношения (1.2.4), записанные в вариациях:

$$\sigma_{\alpha\alpha}^{(k)} = a_{\alpha\alpha}\varepsilon_{\alpha\alpha}^{(k)} + a_{\alpha\beta}\varepsilon_{\beta\beta}^{(k)}, \sigma_{\alpha\beta}^{(k)} = a_{33}\varepsilon_{\alpha\beta}^{(k)}, \tau_{\alpha 3}^{(k)} = G_{\alpha 3}\gamma_{\alpha 3}^{(k)}. \quad (1.2.30)$$

— распределение вариаций компонент вектора перемещения по толщине пакета:

$$v_{\alpha}^{(k)} = u_{\alpha} - \frac{z}{A_{\alpha}} \frac{\partial w}{\partial x^{\alpha}} + \mu_{\alpha\alpha}^{(k)} \pi_{\alpha}, v_3^{(k)} = w. \quad (1.2.31)$$

— соотношения между вариациями деформаций и перемещений:

$$\gamma_{\alpha 3}^{(k)} = \frac{f'(z)\pi_{\alpha}}{G_{\alpha 3}^{(k)}}, \varepsilon_{33}^{(k)} = 0, \quad (1.2.32)$$

$$\begin{aligned} \varepsilon_{\alpha\alpha}^{(k)} &= \frac{1}{A_{\alpha}} \left\{ \frac{\partial u_{\alpha}}{\partial x^{\alpha}} + \frac{1}{A_{\beta}} \frac{\partial A_{\alpha}}{\partial x^{\beta}} u_{\beta} - z \left[\frac{\partial}{\partial x^{\alpha}} \left(\frac{1}{A_{\alpha}} \frac{\partial w}{\partial x^{\alpha}} \right) + \frac{1}{A_{\beta}^2} \frac{\partial A_{\alpha}}{\partial x^{\beta}} \frac{\partial w}{\partial x^{\beta}} \right] + \right. \\ &+ \left. \frac{\partial(\mu_{\alpha\alpha}^{(k)} \pi_{\alpha})}{\partial x^{\alpha}} + \frac{1}{A_{\beta}} \frac{\partial A_{\alpha}}{\partial x^{\beta}} \mu_{\beta\beta}^{(k)} \pi_{\beta} + \frac{A_{\alpha}}{R_{\alpha}} w \right\} + \left(\frac{u_{\alpha}}{R_{\alpha}} - \frac{1}{A_{\alpha}} \frac{\partial w}{\partial x^{\alpha}} \right) \left(\frac{\tilde{u}_{\alpha}}{R_{\alpha}} - \frac{1}{A_{\alpha}} \frac{\partial \tilde{w}}{\partial x^{\alpha}} \right), \\ 2\varepsilon_{12}^{(k)} &= \frac{1}{A_1} \left\{ \frac{\partial u_2}{\partial x^1} - \frac{1}{A_2} \frac{\partial A_1}{\partial x^2} u_1 - z \left[\frac{\partial}{\partial x^1} \left(\frac{1}{A_2} \frac{\partial w}{\partial x^2} \right) - \frac{1}{A_1 A_2} \frac{\partial A_1}{\partial x^2} \frac{\partial w}{\partial x^1} \right] + \right. \\ &+ \left. \frac{\partial(\mu_{22}^{(k)} \pi_2)}{\partial x^1} - \frac{1}{A_2} \frac{\partial A_1}{\partial x^2} \mu_{11}^{(k)} \pi_1 \right\} + \frac{1}{A_2} \left\{ \frac{\partial u_1}{\partial x^2} - \frac{1}{A_1} \frac{\partial A_2}{\partial x^1} u_2 - \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -z \left[\frac{\partial}{\partial x^2} \left(\frac{1}{A_1} \frac{\partial w}{\partial x^1} \right) - \frac{1}{A_1 A_2} \frac{\partial A_2}{\partial x^1} \frac{\partial w}{\partial x^2} \right] + \frac{\partial (\mu_{11}^{(k)} \pi_1)}{\partial x^2} - \frac{1}{A_1} \frac{\partial A_2}{\partial x^1} \mu_{22}^{(k)} \pi_2 \left. \right\} + \\
& + \left(\frac{\tilde{u}_1}{R_1} - \frac{1}{A_1} \frac{\partial \tilde{w}}{\partial x^1} \right) \left(\frac{u_2}{R_2} - \frac{1}{A_2} \frac{\partial w}{\partial x^2} \right) + \left(\frac{\tilde{u}_2}{R_2} - \frac{1}{A_2} \frac{\partial \tilde{w}}{\partial x^2} \right) \left(\frac{u_1}{R_1} - \frac{1}{A_1} \frac{\partial w}{\partial x^1} \right).
\end{aligned}$$

— выражение для вариаций физических составляющих обобщенных усилий и моментов через вариации физических составляющих тензора напряжений ($\omega = 1, 2; \alpha \neq \omega$):

$$[T_{\alpha\beta}, M_{\alpha\beta}, S_{\alpha\beta}] = \sum_{k=1}^m \int_{h_{k-1}}^{h_k} \sigma_{\alpha\beta}^{(k)} [1, z, \mu_{\beta\beta}^{(k)}] dz, \quad (1.2.33)$$

$$\begin{aligned}
Q_\alpha &= \sum_{k=1}^m \int_{h_{k-1}}^{h_k} \left\{ \sigma_{\alpha\alpha}^{(k)} \frac{1}{A_\alpha} \frac{\partial \mu_{\alpha\alpha}^{(k)}}{\partial x^\alpha} + \sigma_{\alpha\omega}^{(k)} \frac{(\mu_{\omega\omega}^{(k)} - \mu_{\alpha\alpha}^{(k)})}{A_\alpha A_\omega} \frac{\partial A_\alpha}{\partial x^\omega} \right\} dz + \\
&+ \sum_{k=1}^m \int_{h_{k-1}}^{h_k} \left\{ \sigma_{\omega\alpha}^{(k)} \frac{1}{A_\omega} \frac{\partial \mu_{\alpha\alpha}^{(k)}}{\partial x^\omega} - \sigma_{\omega\omega}^{(k)} \frac{(\mu_{\omega\omega}^{(k)} - \mu_{\alpha\alpha}^{(k)})}{A_\alpha A_\omega} \frac{\partial A_\omega}{\partial x^\alpha} \right\} dz + \sum_{k=1}^m \int_{h_{k-1}}^{h_k} \frac{\tau_{3\alpha}^{(k)} f'(z)}{G_{\alpha 3}^{(k)}} dz.
\end{aligned}$$

— выражение для вариаций даламберовых сил инерции:

$$[X_\alpha, Y_\alpha, Z_\alpha] = \sum_{k=1}^m \int_{h_{k-1}}^{h_k} \rho^{(k)} \dot{v}_\alpha^{(k)} [1, z, \mu_{\alpha\alpha}^{(k)}] dz, \quad I = \dot{w} \sum_{k=1}^m \int_{h_{k-1}}^{h_k} \rho^{(k)} dz. \quad (1.2.34)$$

— выражения для компонент тензора $\mu^{(k)}$:

$$\mu_{\alpha\alpha}^{(k)} = \int_{h_{k-1}}^z \frac{f'(t) dt}{G_{\alpha 3}^{(k)}} + (1 - \delta_{k1}) \sum_{j=1}^{k-1} \int_{h_{j-1}}^{h_j} \frac{f'(t) dt}{G_{\alpha 3}^{(j)}}. \quad (1.2.35)$$

— линеаризованные дифференциальные уравнения движения элемента слоистой оболочки в вариациях: (1.2.36)

$$\frac{\partial A_2 T_{11}}{\partial x^1} - \frac{\partial A_2}{\partial x^1} T_{22} + \frac{\partial A_1 T_{21}}{\partial x^2} + \frac{\partial A_1}{\partial x^2} T_{12} - \frac{A_1 A_2}{R_1} \left(\tilde{T}_{11} \left[\frac{u_1}{R_1} - \frac{1}{A_1} \frac{\partial w}{\partial x^1} \right] + \right.$$

$$\begin{aligned}
& +T_{11}\left[\frac{\tilde{u}_1}{R_1} - \frac{1}{A_1} \frac{\partial \tilde{w}}{\partial x^1}\right] + \tilde{T}_{21}\left[\frac{u_2}{R_2} - \frac{1}{A_2} \frac{\partial w}{\partial x^2}\right] + T_{21}\left[\frac{\tilde{u}_2}{R_2} - \frac{1}{A_2} \frac{\partial \tilde{w}}{\partial x^2}\right] - A_1 A_2 \dot{X}_1 = 0, \\
& \frac{\partial A_1 T_{22}}{\partial x^2} - \frac{\partial A_1}{\partial x^2} T_{11} + \frac{\partial A_2 T_{12}}{\partial x^1} + \frac{\partial A_2}{\partial x^1} T_{21} - A_1 A_2 \dot{X}_2 - \frac{A_1 A_2}{R_2} \left(\tilde{T}_{22} \left[\frac{u_2}{R_2} - \frac{1}{A_2} \frac{\partial w}{\partial x^2} \right] + \right. \\
& \left. + T_{22} \left[\frac{\tilde{u}_2}{R_2} - \frac{1}{A_2} \frac{\partial \tilde{w}}{\partial x^2} \right] + \tilde{T}_{12} \left[\frac{u_1}{R_1} - \frac{1}{A_1} \frac{\partial w}{\partial x^1} \right] + T_{12} \left[\frac{\tilde{u}_1}{R_1} - \frac{1}{A_1} \frac{\partial \tilde{w}}{\partial x^1} \right] \right) = 0, \\
& \frac{T_{11}}{R_1} + \frac{T_{22}}{R_2} - \frac{1}{A_1 A_2} \left\{ \frac{\partial}{\partial x^1} \frac{1}{A_1} \left[\frac{\partial A_2 M_{11}}{\partial x^1} - \frac{\partial A_2}{\partial x^1} M_{22} + \frac{\partial A_1 M_{21}}{\partial x^2} + \frac{\partial A_1}{\partial x^2} M_{12} \right] + \right. \\
& \left. + \frac{\partial}{\partial x^2} \frac{1}{A_2} \left[\frac{\partial A_1 M_{22}}{\partial x^2} - \frac{\partial A_1}{\partial x^2} M_{11} + \frac{\partial A_2 M_{12}}{\partial x^1} + \frac{\partial A_2}{\partial x^1} M_{21} \right] \right\} + \frac{1}{A_1 A_2} \times \\
& \times \left\{ \frac{\partial}{\partial x^1} A_2 \left(\tilde{T}_{11} \left[\frac{u_1}{R_1} - \frac{1}{A_1} \frac{\partial w}{\partial x^1} \right] + \tilde{T}_{21} \left[\frac{u_2}{R_2} - \frac{1}{A_2} \frac{\partial w}{\partial x^2} \right] \right) + \frac{\partial}{\partial x^2} A_1 \left(\tilde{T}_{12} \left[\frac{u_1}{R_1} - \frac{1}{A_1} \frac{\partial w}{\partial x^1} \right] + \right. \right. \\
& \left. \left. + \tilde{T}_{22} \left[\frac{u_2}{R_2} - \frac{1}{A_2} \frac{\partial w}{\partial x^2} \right] \right) \right\} + \frac{1}{A_1 A_2} \left\{ \frac{\partial}{\partial x^1} A_2 \left(T_{11} \left[\frac{\tilde{u}_1}{R_1} - \frac{1}{A_1} \frac{\partial \tilde{w}}{\partial x^1} \right] + \right. \right. \\
& \left. \left. + T_{21} \left[\frac{\tilde{u}_2}{R_2} - \frac{1}{A_2} \frac{\partial \tilde{w}}{\partial x^2} \right] \right) + \frac{\partial}{\partial x^2} A_1 \left(T_{12} \left[\frac{\tilde{u}_1}{R_1} - \frac{1}{A_1} \frac{\partial \tilde{w}}{\partial x^1} \right] + T_{22} \left[\frac{\tilde{u}_2}{R_2} - \frac{1}{A_2} \frac{\partial \tilde{w}}{\partial x^2} \right] \right) \right\} + \\
& + \dot{Y} + \frac{1}{A_1 A_2} \left(\frac{\partial A_2 \dot{Y}_1}{\partial x^1} + \frac{\partial A_1 \dot{Y}_2}{\partial x^2} \right) = 0, \\
& \frac{\partial A_2 S_{11}}{\partial x^1} - \frac{\partial A_2}{\partial x^1} S_{22} + \frac{\partial A_1 S_{21}}{\partial x^2} + \frac{\partial A_1}{\partial x^2} S_{12} - A_1 A_2 Q_1 - A_1 A_2 \dot{Z}_1 = 0, \\
& \frac{\partial A_1 S_{22}}{\partial x^2} - \frac{\partial A_1}{\partial x^2} S_{11} + \frac{\partial A_2 S_{12}}{\partial x^1} + \frac{\partial A_2}{\partial x^1} S_{21} - A_1 A_2 Q_2 - A_1 A_2 \dot{Z}_2 = 0.
\end{aligned}$$

Система (1.2.30)–(1.2.36) замыкается однородными краевыми условиями, которые получаются из (1.2.11) в результате описанных выше действий. Если уравнение контура имеет вид $x^1 = \text{const}$, то пары вариаций характеристик состояния, выборочно обращаемых на нем в нуль, следующие:

$$\begin{aligned}
& (T_{11}, u_1), (T_{12}, u_2), \left(M_{11}, \frac{u_1}{R_1} - \frac{1}{A_1} \frac{\partial w}{\partial x^1} \right), (S_{11}, \pi_1), (S_{12}, \pi_2), \\
& \left(\frac{1}{A_1} \left(\frac{\partial A_2 M_{11}}{\partial x^1} + 2 \frac{\partial A_1 M_{21}}{\partial x^2} \right) - A_2 \left(\tilde{T}_{11} \left[\frac{u_1}{R_1} - \frac{1}{A_1} \frac{\partial w}{\partial x^1} \right] + \tilde{T}_{21} \left[\frac{u_2}{R_2} - \frac{1}{A_2} \frac{\partial w}{\partial x^2} \right] \right) - \right. \\
& \left. - A_2 \left(T_{11} \left[\frac{\tilde{u}_1}{R_1} - \frac{1}{A_1} \frac{\partial \tilde{w}}{\partial x^1} \right] + T_{21} \left[\frac{\tilde{u}_2}{R_2} - \frac{1}{A_2} \frac{\partial \tilde{w}}{\partial x^2} \right] \right) - A_2 \dot{Y}_{1,w} \right). \quad (1.2.37)
\end{aligned}$$

В результате, в системе координат, связанной с линиями кривизн оболочки, сформулирована краевая задача (1.2.30)–(1.2.37) для системы уравнений в частных производных, к которой сводится проблема динамической устойчивости тонкостенных многослойных анизотропных оболочек. Характеристики невозмущенного состояния (1.2.28), входящие в ее коэффициенты, должны определяться в результате интегрирования соответствующей краевой задачи.

Оставляя в стороне особые случаи, требующие исследования нелинейной системы в вариациях, будем (следуя работам [30, 67, 79, 80, 158, 173]) называть основное состояние (1.2.28) нелинейной системы устойчивым, если все решения линеаризованной системы (1.2.30)–(1.2.37) ограничены во времени, иначе, – состояние неустойчиво.

Исследование вопроса о динамической устойчивости многослойных композитных оболочек сводится к выявлению в пространстве параметров нагрузки областей, соответствующих ограниченному во времени решениям однородной краевой задачи (1.2.30)–(1.2.37).

Отметим, что опуская в уравнениях и условиях (1.2.30)–(1.2.37) инерционные слагаемые, получим статическую краевую задачу. А также для этой системы остается верным предельный переход (1.2.12).

1.3. ЧИСЛЕННОЕ ИНТЕГРИРОВАНИЕ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ МЕТОДОМ ИНВАРИАНТНОГО ПОГРУЖЕНИЯ

В данном параграфе рассматривается вопрос численного интегрирования линейных краевых задач для систем обыкновенных дифференциальных уравнений, к которым приводит исследование свободных колебаний многослойных анизотропных оболочек вращения. Во введении затрагивалась проблема осуществления численного решения таких задач. В частности, было отмечено, что использование уточненной модели выдвигает новые требования к применяемым при расчете численным методам. Использование методов типа пристрелки, эффективно работающих в классической теории и теории типа Тимошенко, встречает значительные трудности при численном решении рассматриваемых задач в рамках принятых уточнений. Этот факт обусловлен краевыми эффектами напряженного состояния, связанными с учетом поперечных сдвиговых деформаций. Действительно, исследование спектра в задачах деформирования (см. [30]) и собственных колебаний теории оболочек дает основание говорить о том, что спектральный радиус матрицы коэффициентов этих систем на порядки больше длины промежутка интегрирования, при этом спектр расположен квазисимметрично относительно мнимой оси. Это обстоятельство делает актуальным апробацию новых и модификацию существующих численных методов. Отметим ряд работ успешно проведенных в этом направлении [23–25, 30, 35, 36, 48, 119–121, 132].

В представленной работе использован численный метод инвариантного погружения [30]. Идея метода заключается в сведении первоначальной краевой задачи к задаче Коши, для двух матричных дифференциальных уравнений, весь спектр матрицы Якоби которых характеризуется большим разбросом и лежит в левой комплексной полуплоскости. Такие системы

относят к классу жестких [157]. Их устойчивое численное решение можно осуществить классическими явными методами [157, 160, 173, 188, 306 и другие] при существенном ограничении на шаг интегрирования. Подробная проработка этого и других вопросов, возникающих при использовании метода инвариантного погружения, представлена в [30]. Приведенное ниже изложение метода затрагивает численное решение краевых задач только для линейных систем обыкновенных дифференциальных уравнений.

1.3.1. МЕТОД ИНВАРИАНТНОГО ПОГРУЖЕНИЯ

Рассмотрим краевую задачу

$$y'(x) = A(x)y(x) + f(x), x \in [0, 1] \quad (1.3.1)$$

$$My(0) = a, Ny(1) = b. \quad (1.3.2)$$

Здесь x – независимая переменная, $y(x)$ – искомая $2s \times L$ матрица, $A(x), f(x)$ – заданные непрерывные $2s \times 2s$ и $2s \times L$ матрицы соответственно; a, b – числовые $s \times L$ матрицы; M, N – числовые $s \times 2s$ матрицы, причем M представлена в виде

$$M = [E_s, O_s],$$

где E_s, O_s – $s \times s$ единичная и нулевая матрицы. Заметим, что такого вида матрицы M всегда можно добиться надлежащей перенумерацией компонент искомого элемента $y(x)$. Следует подчеркнуть, что $y(x)$ является прямоугольной матрицей, а не вектором. Это, как следует из дальнейшего, способствует значительному упрощению численной реализации решаемой задачи, поскольку сокращает как число неизвестных функций, так и выполняемый объем вычислений.

Следуя [30], проведем погружение (1.3.1), (1.3.2) в семейство однопараметрических краевых задач с параметром t (t – длина промежутка интегрирования):

$$y'(x, t) = A(x)y(x, t) + f(x), x \in [0, 1], t \in [x, 1] \quad (1.3.3)$$

$$My(0, t) = a, Ny(t, t) = b. \quad (1.3.4)$$

Далее, предполагая существование единственного решения при всех значениях параметра $t \in (x, 1]$, рассмотрим две вспомогательные задачи:

$$V'(x, t) = A(x)V(x, t), x \in [0, 1], t \in [x, 1] \quad (1.3.5)$$

$$MV(0, t) = O_s, RV(t, t) = E_s \quad (1.3.6)$$

и

$$Z'(x, t) = A(x)Z(x, t) + f(x), x \in [0, 1], t \in [x, 1] \quad (1.3.7)$$

$$MZ(0, t) = a, RZ(t, t) = O_{s \times L}. \quad (1.3.8)$$

Здесь $V(x), Z(x) - 2s \times s$ и $2s \times L$ матрицы соответственно; $R -$ числовая $s \times 2s$ матрица специального вида

$$R = [O_s, E_s].$$

Используя принцип суперпозиции [188], справедливый в силу линейности краевых задач (1.3.5)–(1.3.6) и (1.3.7)–(1.3.8) и, сравнивая полученный результат с уравнениями (1.3.3) и граничными условиями (1.3.4), устанавливаем связь между матричными функциями $V(x, t), Z(x, t)$ и $y(x, t)$:

$$y(x, t) = V(x, t)Q + Z(x, t). \quad (1.3.9)$$

Числовая $s \times L$ матрица Q определяется из краевого условия (1.3.4) на границе $x = 1$:

$$Ny(1, 1) = b.$$

Очевидно, что решение задачи (1.3.1), (1.3.2) определяется, как

$$y(x) = y(x, 1).$$

Для установления искомой зависимости, выводим две задачи Коши для матричных дифференциальных уравнений (x_* – фиксированная точка промежутка интегрирования $[0, 1]$):

$$\frac{d\Lambda}{dt}(t) = \bar{A}_{12}(t) + \bar{A}_{11}(t)\Lambda(t) - \Lambda(t)(\bar{A}_{22}(t) + \bar{A}_{21}(t)\Lambda(t)), t \in [0, 1],$$

$$\Lambda(0) = \Lambda_0 \quad (1.3.10)$$

и

$$\begin{aligned} \frac{d\Psi}{dt}(t, x_*) &= -\Psi(t, x_*) (\bar{A}_{22}(t) + \bar{A}_{21}(t)\Lambda(t)), \quad x_* \in [0, 1], t \in [x_*, 1], \\ \Psi(t, x_*)|_{t=x_*} &= \Psi_0. \end{aligned} \quad (1.3.11)$$

Здесь $\Lambda_0 = [O_s, a_{s \times L}]$, $\Psi_0 = [E_s, O_{s \times L}]$ – постоянные $s \times (s + L)$ матрицы; $\Lambda(t)$, $\Psi(t, x)$ – искомые $s \times (s + L)$ матрицы, связанные с изучаемыми матрицами $V(x, t)$ и $Z(x, t)$ следующими законами:

$$\Lambda(t) = [V_1(t, t), Z_1(t, t)], \quad (1.3.12)$$

где V_i и Z_i ($i = 1, 2$) – $s \times s$ и $s \times L$ матрицы такие, что

$$V(x, t) = \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_1(x, t) \\ E_s \end{bmatrix}, \quad Z(x, t) = \begin{bmatrix} Z_1 \\ Z_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_1(x, t) \\ O_{s \times L} \end{bmatrix}. \quad (1.3.13)$$

Причем, если ввести матрицы $W(x, t)$ и $P(x)$ размера $2s \times (s + L)$ и матрицу $\Phi(t, x)$ размера $(s + L) \times (s + L)$, определив их как

$$\begin{aligned} W(x, t) &= [V(x, t), Z(x, t)], \\ P(x) &= \begin{pmatrix} \Lambda(x) \\ \Psi_0 \end{pmatrix}, \quad \Phi(t, x) = \begin{pmatrix} \Psi(t, x) \\ \Phi_0 \end{pmatrix}, \quad \Phi_0 = [O_{L \times s}, E_L], \end{aligned} \quad (1.3.14)$$

то устанавливается связь между $V(x, t)$, $Z(x, t)$ и $\Psi(t, x)$, $\Lambda(t)$:

$$W(x, t) = P(x) \cdot \Phi(t, x). \quad (1.3.15)$$

Наконец, коэффициенты систем (1.3.10), (1.3.11) введены формулами

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}, \quad f = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{bmatrix}, \quad \text{где } A_{ij}, s \times s \text{ и } f_i, s \times L \text{ для } \forall i, j = 1, 2,$$

$$\bar{A}_{21} = \begin{bmatrix} A_{21} \\ O_{L \times s} \end{bmatrix}, (s + L) \times s, \quad \bar{A}_{12} = [A_{12}, f_1], s \times (s + L),$$

$$\bar{A}_{22} = \begin{bmatrix} A_{22} & f_2 \\ O_{L \times s} & O_L \end{bmatrix}, (s + L) \times (s + L).$$

Также отметим (см. [30, с. 202]), что для всякого конечного упорядоченного разбиения промежутка $[0, 1]$:

$$0 = x_0 < x_1 < \dots < x_k = 1 \quad (1.3.16)$$

при любом $t \in [x_k, 1]$ выполняется равенство

$$\Phi(t, x_0) = \Phi(x_1, x_0) \cdot \Phi(x_2, x_1) \cdot \dots \cdot \Phi(x_{k+1}, x_k) \cdot \Phi(t, x_k), \quad (1.3.17)$$

где функции $\Phi(t, x_i)$, $i = 0, \dots, k$ удовлетворяют уравнениям (1.3.11) и начальным условиям

$$\Phi|_{t=x_i} = E_{s+L}. \quad (1.3.18)$$

Приведем алгоритм (см. [30]) вычисления решения $y(x_i)$, $i = 0, \dots, k$ краевой задачи (1.3.1), (1.3.2) по методу инвариантного погружения:

1. Интегрируем задачи Коши (1.3.11) и (1.3.10), строя в ходе вычисления $s \times (s + L)$ матрицы $\Psi(x_{i+1}, x_i)$ и $\Lambda(x_j)$, где $i = 0, \dots, (k - 1)$, $j = 0, \dots, k$.

2. Вычисляем матрицу Q из условия

$$Ny(1, 1) = N(V(1, 1)Q + Z(1, 1)) = b,$$

где $V(1, 1)$ и $Z(1, 1)$ определяются по формулам (1.3.12), (1.3.13).

3. Решение получаем, начиная со значения $x_k = 1$ и заканчивая в значении $x_0 = 0$. Поэтому сначала фиксируем $i = k$ и из условия (1.3.18) определяем $(s + L) \times (s + L)$ матрицу Φ_i :

$$\Phi_k = E_{s+L}.$$

4. По (1.3.15) восстанавливаем $(s + L) \times (s + L)$ матрицу $W(x_i, 1)$ и по (1.3.9) вычисляем $y(x_i)$, учитывая, что $W(x_i, 1) = [V(x_i, 1), Z(x_i, 1)]$:

$$W(x_i, 1) = P(x_i) \cdot \Phi_i, \quad y(x_i) = V(x_i, 1) \cdot Q + Z(x_i, 1).$$

5. Если $i = 0$, то решение построено и вычислительный процесс завершен. Иначе

а) $i := i - 1$;

б) восстанавливаем $(s + L) \times (s + L)$ матрицу $\Phi(x_{i+1}, x_i)$, используя (1.3.14);

в) в силу (1.3.17) определяем $(s + L) \times (s + L)$ матрицу Φ_i :

$$\Phi_i = \Phi(x_{i+1}, x_i) \cdot \Phi_{i+1};$$

г) возвращаемся к пункту 4.

Итак, в ходе вычислений по методу инвариантного погружения

1. Требуется запоминания $(2k + 1)$ матриц размера $s \times (s + L)$, точнее $(k + 1)$ матриц Λ и k матриц Ψ .
2. Достаточно однократного применения сформулированного алгоритма независимо от размерности искомой матричной функции.
3. Интегрирование проводится лишь в одном направлении.
4. Размерность решаемой краевой задачи не зависит от числа узлов разбиения.
5. Нет ограничений на тип краевых условий.

В методе инвариантного погружения эффективно преодолеваются трудности, связанные с учетом погранслоя. Этот факт подтверждается результатами большого объема вычислений и последующего сравнительного анализа, которые были получены авторами метода и широко представлены как в монографии [30], так и в публикациях [23–25, 36].

1.4. ЧИСЛЕННОЕ ИНТЕГРИРОВАНИЕ ЗАДАЧИ О СВОБОДНЫХ КОЛЕБАНИЯХ МНОГОСЛОЙНЫХ ОБОЛОЧЕК ВРАЩЕНИЯ

Предложенный метод интегрирования задач о свободных колебаниях оболочек вращения включает в себя следующие этапы:

1. Формулировка задачи в виде проблемы собственных значений и собственных вектор-функций системы уравнений в частных производных. Использовано: Безразмерная система координат, связанная с линиями кривизн поверхности приведения.

2. Формулировка задачи в виде проблемы собственных значений и собственных вектор-функций распавшихся систем обыкновенных дифференциальных уравнений. Использовано: Представление решения в виде тригонометрического по угловой переменной ряда Фурье [175, 188].

3. Формулировка задачи в виде проблемы определения характеристических чисел и соответствующих им вектор-функций интегральных уравнений Фредгольма 2-го рода [44, 107, 173, 188]. Использовано: Определение и свойства матрицы Грина [30, 380] для системы обыкновенных дифференциальных уравнений.

4. Переход к определению собственных значений и собственных векторов линейной алгебраической системы уравнений. Использовано: Метод Бубнова-Галеркина [237] при решении системы интегральных уравнений и метод инвариантного погружения (см. § 1.3) при формировании матрицы коэффициентов алгебраической системы.

5. Определение собственных частот и собственных форм оболочки. Использовано: Численное решение алгебраической проблемы собственных значений QR-алгоритмом.

Придерживаясь представленной схемы, остановимся на некоторых деталях метода. Рассматриваем задачу о свободных колебаниях многослойных оболочек вращения (1.2.14)–(1.2.20).

С целью записать систему в векторно-матричной форме, вводим безразмерные переменные: $x \in [0, 1]$ – безразмерный параметр длины дуги образующей, $\varphi \in [0, 2\pi]$ – угловая координата, $y(x, \varphi)$ – $2s$ -мерный вектор безразмерных кинематических и силовых характеристик НДС оболочки. Таким образом, задача (1.2.14)–(1.2.21) записывается в виде ($D_\varphi = \partial/\partial\varphi$):

$$A(x, D_\varphi) \frac{\partial y}{\partial x} = B(x, D_\varphi) y + \omega^2 C(x, D_\varphi) y, \quad (1.4.1)$$

$$My(0, \varphi) = O_{s \times 1}, Ny(1, \varphi) = O_{s \times 1}, \quad (1.4.2)$$

$$y(x, \varphi) = y(x, \varphi + 2\pi). \quad (1.4.3)$$

Здесь ω – частотный параметр; A, B, C – заданные $2s \times 2s$ матрицы, элементы которых – полиномы от дифференциального оператора D_φ с переменными относительно x коэффициентами; M, N – $s \times 2s$ матрицы известного строения, $O_{s \times 1}$ – s -мерный нулевой вектор.

Решение (1.4.1)–(1.4.3) строим в виде тригонометрического ряда Фурье [160, 175, 188] с $2s$ -мерными векторными коэффициентами $y_n(x)$:

$$y = \sum_{n=-\infty}^{\infty} y_n(x) \cdot e^{in\varphi}. \quad (1.4.4)$$

Подставляя (1.4.4) в уравнения (1.4.1), краевые условия (1.4.2), а также в условия периодичности (1.4.3), отделяем угловую переменную φ . В результате получаем распавшиеся по индексу n линейные краевые задачи на собственные значения для систем обыкновенных дифференциальных уравнений относительно вектор-функций $y_n(x)$:

$$y'_n(x) = A_n^{-1}(x) \left(B_n(x) + \omega^2 C_n(x) \right) y_n(x), \quad (1.4.5)$$

$$My_n(0) = Ny_n(1) = O_{s \times 1}.$$

Для определения элементов матриц A_n, B_n, C_n достаточно выполнить преобразование $D_\varphi = \partial/\partial\varphi \rightarrow in$ над элементами матриц A, B, C .

При анализе рассматриваемых ниже задач установлено, что номера компонент $2s$ -мерного вектора $y(x, \varphi)$ можно разбить на два множества R и $I, R \cap I = \emptyset, R \cup I = \{1, 2, \dots, 2s\}$ так, что во всех уравнениях, четность степеней оператора D_φ , действующего на компоненты вектора $y(x, \varphi)$ с номерами, принадлежащими одному множеству, совпадает, а с номерами из разных множеств – различна. Поэтому задачи (1.4.5) приводятся к вещественным в результате преобразования $y_{nk} \rightarrow iy_{nk}$, примененного для всех номеров $k \in I$. Также отметим, что в силу вещественности решения $y(x, \varphi)$ коэффициенты $y_n(x)$ в разложении (1.4.4) комплексно сопряжены, т. е.

$y_{-n}(x) = \overline{y_n(x)}$, следовательно, достаточно рассматривать краевые задачи (1.4.5) только при неотрицательных n .

С целью упрощения последующих преобразований, введем новые переменные по формулам

$$u(x) = y_n(x), K(x) = A_n^{-1}(x)B_n(x), \quad (1.4.6)$$

$$F(x) = \omega^2 A_n^{-1}(x)C_n(x)y_n(x)$$

и краевую задачу (1.4.5) перепишем для $2s$ -мерного вектора $u(x)$, при этом индекс n фиксируем и опускаем:

$$u'(x) = K(x)u(x) + F(x), \quad (1.4.7)$$

$$Mu(0) = O_{s \times 1}, Nu(1) = O_{s \times 1}.$$

Пусть $G(x, p)$ – матрица Грина [30, 188, 380], являющаяся решением однородной краевой задачи

$$u'(x) = K(x)u(x), \quad (1.4.8)$$

$$Mu(0) = O_{s \times 1}, Nu(1) = O_{s \times 1},$$

ассоциированной с (1.4.7). Тогда для любого вектора $F(x)$, непрерывного на $[0, 1]$, решение (1.4.7) в силу свойств матрицы Грина [188, 380] допускает представление вида

$$u(x) = \int_0^1 G(x, p)F(p)dp. \quad (1.4.9)$$

Таким образом, на основании (1.4.9), (1.4.7) и (1.4.6) можно утверждать, что определение собственных значений системы (1.4.5) сведено к определению характеристических значений и соответствующих им векторов линейной однородной системы интегральных уравнений Фредгольма второго рода [44]:

$$y_n(x) - \omega^2 \int_0^1 G_n(x, p)A_n^{-1}(p)C_n(p)y_n(p)dp = 0. \quad (1.4.10)$$

Решая систему (1.4.10) в пространстве квадратично суммируемых на $[0, 1]$ $2s$ -мерных вектор-функций $L_2(0, 1)$, используем методом Бубнова–Галеркина [175, 237]. Согласно этому методу, ищем приближенное решение системы $y_{nN}(x)$, которое строится в виде линейной комбинации базисных векторов. В качестве базиса можно выбрать любую полную линейно независимую ортонормированную систему вектор-функций [175], а в рассматриваемом пространстве $L_2(0, 1)$ она дополнительно может быть выбрана непрерывной.

Пусть базис определен системой функций $v_k(x)$, $k = 1, 2, \dots$. Тогда решение $y_{nN}(x)$ будет представлено в виде

$$y_{nN}(x) = \sum_{k=1}^N c_k \cdot v_k(x). \quad (1.4.11)$$

Следуя методу Бубнова–Галеркина, подставляем (1.4.11) в систему (1.4.10) и требуем ортогональности полученной невязки ко всем координатным векторам v_k . В итоге, получаем систему линейных однородных алгебраических уравнений относительно коэффициентов c_k ($i = 1, \dots, N$):

$$c_i - \omega^2 \sum_{k=1}^N c_k \int_0^1 \left(\int_0^1 G_n(x, p) A_n^{-1}(p) C_n(p) v_k(p) dp \right) v_i(x) dx = 0. \quad (1.4.12)$$

При вычислении матрицы коэффициентов этой системы заметим, что в силу (1.4.6), (1.4.7) и (1.4.9) внутренние интегралы, обозначим их через $2s$ -мерные векторы $z_k(x)$, являются решениями следующих краевых задач ($n = 0, 1, \dots$ и $k = 1, \dots, N$):

$$z'_k(x) = A_n^{-1}(x)(B_n(x)z_k(x) + C_n(x)v_k(x)), \quad (1.4.13)$$

$$Mz_k(0) = O_{s \times 1}, Nz_k(1) = O_{s \times 1}.$$

Введем в рассмотрение $2s \times N$ матрицы $Z(x)$ и $H_n(x)$, объединяя искомые векторы z_k и векторы свободных членов $A_n^{-1}C_n v_k$:

$$Z(x) = [z_1, \dots, z_N], H_n(x) = [A_n^{-1}C_n v_1, \dots, A_n^{-1}C_n v_N] \quad (1.4.14)$$

С учетом (1.4.14) распавшиеся по индексу k задачи (1.4.13) можно переформулировать в виде одной матричной краевой задачи относительно $2s \times N$ матрицы $Z(x)$:

$$Z'(x) = A_n^{-1}(x)B_n(x)Z(x) + H_n(x), \quad (1.4.15)$$

$$MZ(0) = O_{s \times N}, NZ(1) = O_{s \times N}.$$

Если решена задача (1.4.15), то вычисление внешних интегралов системы (1.4.12) можно осуществить с помощью какой-либо квадратурной формулы [173, 188] что завершит формирование матрицы коэффициентов системы. Ниже использовалась квадратурная формула Симпсона.

Физический интерес представляют только нетривиальные решения полученной системы. Таким образом, первоначальная задача о свободных колебаниях сведена к задаче определения характеристических значений и векторов матрицы коэффициентов системы (1.4.12). Вопросы численного решения алгебраической проблемы собственных значений разработаны достаточно полно [344]. В данной работе использовался QR-алгоритм в сочетании с приведением матрицы к верхней форме Хессенберга [344]. Если эта проблема решена и для каждого фиксированного n известны собственные значения $\lambda_1, \dots, \lambda_N$ матрицы коэффициентов, то вычисление собственных частот завершается по формуле

$$\omega_k = 1/\sqrt{\lambda_k}. \quad (1.4.16)$$

Требуемая точность формулы (1.4.16) обеспечивается сходимостью метода Бубнова-Галеркина для интегральных уравнений Фредгольма 2 рода и количеством используемых в разложении (1.4.11) базисных векторов. В исследованиях, представленных в главах 2–5, выбор параметра N проводился численно в результате исследования скорости сходимости метода при вычислении характеристических чисел.

Объем вычислений можно сократить, если учесть, что в задачах на собственные колебания многие столбцы матрицы C_n являются нулевыми. Действительно, элементы этой матрицы определяются слагаемыми, связанными (в динамической задаче) с инерционными силами, которые вполне характеризуются компонентами вектора перемещений. Поэтому, обозначив множество номеров ненулевых и нулевых столбцов через J и K соответственно, при конструировании базисной системы будем требовать ее полноты в классе $2s$ -мерных векторов, K -ые координаты которых равны нулю. Такая базисная система аппроксимирует J -ые координаты собственных векторов задачи (1.4.10) [30].

Накопленный вычислительный опыт [30, 37, 38, 287–291] выявил эффективность метода, что позволяет рекомендовать его к использованию в задачах теории оболочек.

1.5. ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ НЕКОТОРЫХ КАНОНИЧЕСКИХ КООРДИНАТНЫХ СИСТЕМ

Пусть поверхность Ω получена в результате вращения кривой K вокруг оси y^3 прямоугольной декартовой системы координат $Oy^1y^2y^3$ (рис. 1.6). Если кривая K (образующая Ω) задана параметрически:

$$y^1 = u(t), y^3 = v(t), \text{ где } u(t), v(t) \in C^3[a, b],$$

то параметризация поверхности Ω имеет вид ($a \leq t \leq b, 0 \leq \varphi \leq 2\pi$) [30]:

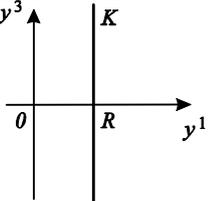
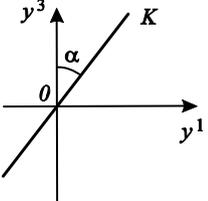
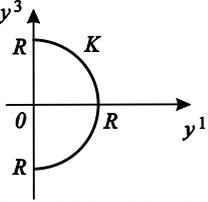
$$y^1 = u(t) \cdot \cos\varphi, y^2 = u(t) \cdot \sin\varphi, y^3 = v(t). \quad (1.5.1)$$

Уравнения (1.5.1) вводят криволинейную систему t, φ , координатные линии которой совпадают с линиями кривизны Ω . Обозначим через A_1, A_2 – параметры Ламе этой системы и через R_1, R_2 – радиусы кривизны нормальных сечений в направлении координатных линий. Согласно [30], эти величины определяются следующими формулами:

$$A_1 = \sqrt{u'^2 + v'^2}, A_2 = u, R_1 = \frac{(u'^2 + v'^2)^{3/2}}{|u''v' - u'v''|}, R_2 = \frac{u(u'^2 + v'^2)^{1/2}}{|v'|}.$$

В таблице 1.1 представлены параметры систем координат, связанных с поверхностями вращения некоторых канонических форм.

Таблица 1.1

| Вид поверхности | Образующая K на плоскости Oy^1y^3 | Параметризация K | Параметры Ламе и радиусы кривизн |
|-------------------------------|---|---|--|
| Цилиндрическая радиуса R |  | $y^1 = R,$ $y^3 = t,$ где $t \in (-\infty, \infty)$ и $u(t) = R, v(t) = t.$ | $A_1 = 1,$ $A_2 = R$ $R_1 = \infty,$ $R_2 = R$ |
| Коническая раствора 2α |  | $y^1 = t \cdot \sin \alpha,$ $y^3 = t \cdot \cos \alpha,$ где $t \in (-\infty, \infty)$ и $u(t) = t \cdot \sin \alpha, v(t) = t \cdot \cos \alpha$ | $A_1 = 1,$ $A_2 = t \cdot \sin \alpha$ $R_1 = \infty,$ $R_2 = t \cdot \operatorname{tg} \alpha$ |
| Сферическая радиуса R |  | $y^1 = R \cdot \sin (t/R),$ $y^3 = R \cdot \cos (t/R),$ $t \in [0, \pi R]$ – длина дуги $u(t) = y^1, v(t) = y^3$ | $A_1 = 1,$ $A_2 = R \sin (t/R)$ $R_1 = R,$ $R_2 = R$ |

ГЛАВА 2. СВОБОДНЫЕ КОЛЕБАНИЯ МНОГОСЛОЙНОЙ КОМПОЗИТНОЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ

В настоящей главе рассмотрен класс задач о свободных колебаниях тонких упругих слоистых цилиндрических оболочек, собранных из упругих ортотропных слоев. Исследования проводились на основе соотношений (1.2.14)–(1.2.21), полученных в первой главе. Также представлены результаты параметрического анализа значений собственных частот и форм собственных колебаний.

2.1. ПОСТАНОВКА И РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ

В этом параграфе сформулирована разрешающая система уравнений задачи о свободных колебаниях слоистой армированной круговой цилиндрической оболочки.

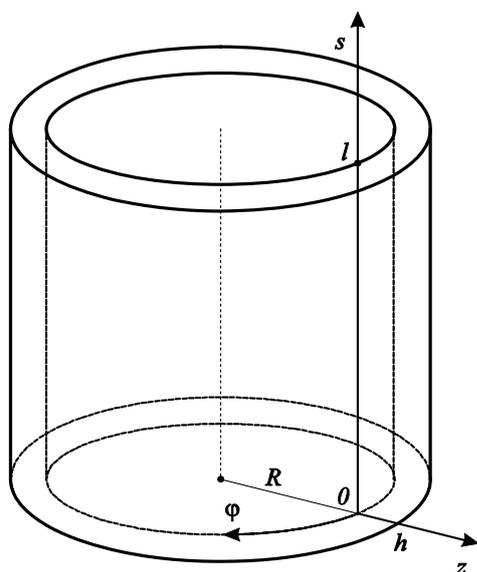


Рис. 2.1. Круговая цилиндрическая оболочка и связанная с ее поверхностью система координат.

Рассмотрим круговую замкнутую цилиндрическую оболочку радиуса R , длины l и толщины h , собранную из m упругих ортотропных армированных слоев постоянной толщины (рис. 2.1). Введем систему координат s, φ, z , где $s = x^1$ – расстояние, отсчитываемое вдоль образующей от края оболочки, $\varphi = x^2$ – угловая, z – поперечная координата. Параметры Ламе A_1, A_2 и радиусы кривизны R_1, R_2 координатных линий цилиндрической системы следующие (см. табл. 1.1):

$$A_1 = 1, A_2 = R, R_1 = \infty, R_2 = R. \quad (2.1)$$

Принимая функцию распределения поперечных деформаций в виде (1.2.3), систему уравнений свободных установившихся гармонических колебаний (1.2.14)–(1.2.20) цилиндрической оболочки с учетом (2.1) запишем в виде:

— соотношения напряжения–деформации:

$$\begin{aligned} \sigma_{ss}^{(k)} &= a_{11}\varepsilon_{ss}^{(k)} + a_{12}\varepsilon_{\varphi\varphi}^{(k)}, \quad \sigma_{\varphi\varphi}^{(k)} = a_{12}\varepsilon_{ss}^{(k)} + a_{22}\varepsilon_{\varphi\varphi}^{(k)}, \\ \sigma_{s\varphi}^{(k)} &= \sigma_{\varphi s}^{(k)} = a_{33}\varepsilon_{s\varphi}^{(k)}, \quad \tau_{sz}^{(k)} = G_{13}\gamma_{sz}^{(k)}, \quad \tau_{\varphi z}^{(k)} = G_{23}\gamma_{\varphi z}^{(k)}. \end{aligned} \quad (2.2)$$

— закон распределения физических составляющих вектора перемещения по толщине пакета слоев

$$v_s^{(k)} = u_s - z \frac{\partial w}{\partial s} + \mu_{11}^{(k)} \pi_s, \quad v_z^{(k)} = w. \quad (2.3)$$

$$v_\varphi^{(k)} = u_\varphi - \frac{z}{R} \frac{\partial w}{\partial \varphi} + \mu_{22}^{(k)} \pi_\varphi.$$

— соотношения деформации–перемещения:

$$\gamma_{sz}^{(k)} = \frac{f'(z)\pi_s}{G_{13}^{(k)}}, \quad \gamma_{\varphi z}^{(k)} = \frac{f'(z)\pi_\varphi}{G_{23}^{(k)}}, \quad \varepsilon_{zz}^{(k)} = 0, \quad (2.4)$$

$$\varepsilon_{ss}^{(k)} = \frac{\partial u_s}{\partial s} - z \frac{\partial^2 w}{\partial s^2} + \frac{\partial(\mu_{11}^{(k)} \pi_s)}{\partial s}, \quad \varepsilon_{\varphi\varphi}^{(k)} = \frac{1}{R} \left\{ \frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} - \frac{z}{R} \frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2} + \mu_{22}^{(k)} \frac{\partial \pi_\varphi}{\partial \varphi} + w \right\},$$

$$2\varepsilon_{s\varphi}^{(k)} = \frac{\partial u_\varphi}{\partial s} - \frac{2z}{R} \frac{\partial^2 w}{\partial s \partial \varphi} + \frac{\partial(\mu_{22}^{(k)} \pi_\varphi)}{\partial s} + \frac{1}{R} \left\{ \frac{\partial u_s}{\partial \varphi} + \mu_{11}^{(k)} \frac{\partial \pi_s}{\partial \varphi} \right\}.$$

— выражение физических составляющих обобщенных усилий и моментов через физические составляющие тензора напряжений:

$$[T_{ss}, M_{ss}, S_{ss}] = \sum_{k=1}^m \int_{h_{k-1}}^{h_k} \sigma_{ss}^{(k)} [1, z, \mu_{11}^{(k)}] dz, \quad (2.5)$$

$$[T_{\varphi\varphi}, M_{\varphi\varphi}, S_{\varphi\varphi}] = \sum_{k=1}^m \int_{h_{k-1}}^{h_k} \sigma_{\varphi\varphi}^{(k)} [1, z, \mu_{22}^{(k)}] dz,$$

$$[T_{s\varphi}, M_{s\varphi}, S_{s\varphi}, S_{\varphi s}] = \sum_{k=1}^m \int_{h_{k-1}}^{h_k} \sigma_{s\varphi}^{(k)} [1, z, \mu_{22}^{(k)}, \mu_{11}^{(k)}] dz,$$

$$Q_s = \sum_{k=1}^m \int_{h_{k-1}}^{h_k} \sigma_{ss}^{(k)} \frac{\partial \mu_{11}^{(k)}}{\partial s} dz + \sum_{k=1}^m \int_{h_{k-1}}^{h_k} \frac{\tau_{sz}^{(k)} f'(z)}{G_{13}^{(k)}} dz,$$

$$Q_\varphi = \sum_{k=1}^m \int_{h_{k-1}}^{h_k} \sigma_{s\varphi}^{(k)} \frac{\partial \mu_{22}^{(k)}}{\partial s} dz + \sum_{k=1}^m \int_{h_{k-1}}^{h_k} \frac{\tau_{\varphi z}^{(k)} f'(z)}{G_{23}^{(k)}} dz.$$

— выражения интегральных характеристик даламберовых сил инерции:

$$[\dot{X}_s, \dot{Y}_s, \dot{Z}_s] = \sum_{k=1}^m \int_{h_{k-1}}^{h_k} \rho^{(k)} \dot{v}_s^{(k)} [1, z, \mu_{11}^{(k)}] dz, \quad (2.6)$$

$$[\dot{X}_\varphi, \dot{Y}_\varphi, \dot{Z}_\varphi] = \sum_{k=1}^m \int_{h_{k-1}}^{h_k} \rho^{(k)} \dot{v}_\varphi^{(k)} [1, z, \mu_{22}^{(k)}] dz, \quad \dot{I} = \dot{w} \sum_{k=1}^m \int_{h_{k-1}}^{h_k} \rho^{(k)} dz.$$

— выражения для компонент тензора $\mu^{(k)}$ (1.2.24);

— дифференциальные уравнения свободных колебаний:

$$\frac{\partial T_{ss}}{\partial s} + \frac{1}{R} \frac{\partial T_{s\varphi}}{\partial \varphi} + \omega^2 X_s = 0, \quad \frac{\partial T_{s\varphi}}{\partial s} + \frac{1}{R} \frac{\partial T_{\varphi\varphi}}{\partial \varphi} + \omega^2 X_\varphi = 0, \quad (2.7)$$

$$\frac{\partial}{\partial s} \left[\frac{\partial R M_{ss}}{\partial s} + 2 \frac{\partial M_{s\varphi}}{\partial \varphi} + \omega^2 R Y_s \right] + \frac{1}{R} \frac{\partial^2 M_{\varphi\varphi}}{\partial \varphi^2} - T_{\varphi\varphi} + \omega^2 \left(R I + \frac{\partial Y_\varphi}{\partial \varphi} \right) = 0,$$

$$\frac{\partial S_{ss}}{\partial s} + \frac{1}{R} \frac{\partial S_{\varphi s}}{\partial \varphi} - Q_s + \omega^2 Z_s = 0, \quad \frac{\partial S_{s\varphi}}{\partial s} + \frac{1}{R} \frac{\partial S_{\varphi\varphi}}{\partial \varphi} - Q_\varphi + \omega^2 Z_\varphi = 0.$$

Система (2.2)–(2.7) дополняется однородными краевыми условиями, которые заключаются в задании на торцах $s=0$ и $s=l$ кинематических и силовых характеристик, альтернативно выбираемых из пар (1.2.25):

$$(T_{ss}, u_s), (T_{s\varphi}, u_\varphi), \left(M_{ss}, \frac{\partial w}{\partial s} \right), (S_{ss}, \pi_s), (S_{s\varphi}, \pi_\varphi), \quad (2.8)$$

$$\left(R \frac{\partial M_{ss}}{\partial s} + 2 \frac{\partial M_{s\varphi}}{\partial \varphi} + \omega^2 R Y_s, w \right).$$

Кроме этого, в силу замкнутости контура оболочки, все характеристики напряженно-деформированного состояния должны удовлетворять условиям 2π -периодичности по угловой координате φ .

В итоге, задача о свободных колебаниях цилиндрической оболочки сформулирована как краевая задача на собственные значения для системы дифференциальных уравнений с частными производными (2.2)–(2.8).

Ниже рассматривалась либо жестко защемленная оболочка (а), либо оболочка консольного типа (б), торец $s = 0$ которой закреплен жестко, а торец $s = l$ свободен от нагрузок. В этих случаях граничные условия (2.8) принимают вид:

$$(а) \quad \text{при } s = 0, s = l: \quad w = u_s = u_\varphi = \frac{\partial w}{\partial s} = \pi_s = \pi_\varphi = 0; \quad (2.9а)$$

$$(б) \quad \text{при } s = 0: \quad w = u_s = u_\varphi = \frac{\partial w}{\partial s} = \pi_s = \pi_\varphi = 0; \quad (2.9б)$$

$$\text{при } s = l: \quad T_{ss} = T_{s\varphi} = M_{ss} = \frac{\partial R M_{ss}}{\partial s} + 2 \frac{\partial M_{s\varphi}}{\partial \varphi} + \omega^2 R Y_s = S_{ss} = S_{s\varphi} = 0.$$

Решение сформулированной краевой задачи (2.2)–(2.8) строим методом, изложенным в § 1.4. Представим полученную систему в матричной форме, используя безразмерные переменные (1.2.26), где $L = l$ – длина оболочки, а так же учитывая выражения для параметров Ламе (2.1):

$$x = \frac{s}{l}, \frac{\partial}{\partial s} = \frac{1}{l} \frac{\partial}{\partial x}, \gamma = \frac{h}{R}, \delta = \frac{l}{R}, \rho_k = \frac{R^2}{E_1^c} \rho_k, \quad (2.10)$$

$$w = h \cdot y_1, y_2 = \frac{\partial y_1}{\partial x}, u_s = R \cdot y_3, u_\varphi = R \cdot y_4, \pi_s = \frac{E_1^c R}{h^3} y_5, u_\varphi = \frac{E_1^c R}{h^3} y_6,$$

$$\frac{\partial RM_{ss}}{\partial s} + 2 \frac{\partial M_{s\varphi}}{\partial \varphi} + \omega^2 RY_s = h^2 E_1^c y_7,$$

$$M_{ss} = h^2 E_1^c y_8, T_{ss} = hE_1^c y_9, T_{s\varphi} = hE_1^c y_{10}, S_{ss} = h^4 y_{11}, S_{s\varphi} = h^4 y_{12}.$$

Таким образом, получаем систему (1.4.1)–(1.4.3), записанную в виде:

$$A(x, D_\varphi) \frac{\partial y}{\partial x} = B(x, D_\varphi) y + \omega^2 C(x, D_\varphi) y, \quad (2.11)$$

$$My(0, \varphi) = O_{6 \times 1}, Ny(1, \varphi) = O_{6 \times 1}, \quad (2.12)$$

$$y(x, \varphi) = y(x, \varphi + 2\pi). \quad (2.13)$$

Строение 6×12 матриц M, N определяется принятыми краевыми условиями (2.8). Так в случае (2.9а) имеем

$$M = N = [E_6, O_6], \quad (2.14)$$

в случае (2.9б):

$$M = [E_6, O_6], N = [O_6, E_6]. \quad (2.15)$$

С целью получить выражения элементов 12×12 матриц A, B, C введем безразмерные тангенциальные и поперечные жесткости слоев

$$a_{ij}^{(k)} = E_k^c b_{ij}^{(k)}, G_{i3}^{(k)} = E_k^c d_{i1}^{(k)}, d_{i2}^{(k)} = d_{i1}'^{(k)}, d_{i1}'^{(k)} = \partial d_{i1}^{(k)} / \partial x, \quad (2.16)$$

и примем обозначения ($i = 0, \dots, m; k = 1, \dots, m$)

$$\beta_i = h_i / h, \quad s_k = E_k^c / E_1^c, t_{ik} = \frac{1}{i+1} (\beta_k^{i+1} - \beta_{k-1}^{i+1}), \quad (2.17)$$

$$\lambda_{i1} = 0, \quad \lambda_{i,k+1} = \lambda_{ik} + (\beta_k^3 - 1.5\beta_k^2) \cdot \left(\frac{1}{s_k d_{i1}^{(k)}} - \frac{1}{s_{k+1} d_{i1}^{(k+1)}} \right),$$

$$v_{i1} = 0, \quad v_{i,k+1} = v_{ik} + (\beta_k^3 - 1.5\beta_k^2) \cdot \left(\frac{d_{i2}^{(k+1)}}{s_{k+1} d_{i1}^{(k+1)} d_{i1}^{(k+1)}} - \frac{d_{i2}^{(k)}}{s_k d_{i1}^{(k)} d_{i1}^{(k)}} \right),$$

$$r_{\delta\beta k} = \frac{t_{6,k} - 3t_{5,k} + 2.25t_{4,k}}{s_k^2 d_{\delta 1}^{(k)} d_{\beta 1}^{(k)}} + (t_{3,k} - 1.5t_{2,k}) \times \left(\frac{\lambda_{\delta k}}{s_k d_{\beta 1}^{(k)}} + \frac{\lambda_{\beta k}}{s_k d_{\delta 1}^{(k)}} \right) + \lambda_{\delta k} \lambda_{\beta k} t_{0k},$$

$$\begin{aligned} \bar{r}_{\delta jk} &= \frac{(t_{3+j,k} - 1.5t_{2+j,k})}{s_k d_{\delta 1}^{(k)}} + \lambda_{\delta k} t_{jk}, \quad q_{\delta \beta k} = -\frac{d_{\delta 2}^{(k)}(t_{6,k} - 3t_{5,k} + 2.25t_{4,k})}{s_k^2 d_{\delta 1}^{(k)} d_{\delta 1}^{(k)} d_{\beta 1}^{(k)}} + \\ &+ (t_{3,k} - 1.5t_{2,k}) \cdot \left(\frac{v_{\delta k}}{s_k d_{\beta 1}^{(k)}} - \frac{\lambda_{\beta k} d_{\delta 2}^{(k)}}{s_k d_{\delta 1}^{(k)} d_{\delta 1}^{(k)}} \right) + v_{\delta k} \lambda_{\beta k} t_{0k}, \\ \bar{q}_{\delta jk} &= -\frac{d_{\delta 2}^{(k)}(t_{3+j,k} - 1.5t_{2+j,k})}{s_k d_{\delta 1}^{(k)} d_{\delta 1}^{(k)}} + v_{\delta k} t_{jk}, \\ \eta_{ik} &= \left(\frac{d_{i2}^{(k)}}{s_k d_{i1}^{(k)} d_{i1}^{(k)}} \right)^2 (t_{6,k} - 3t_{5,k} + 2.25t_{4,k}) - 2(t_{3,k} - 1.5t_{2,k}) \frac{v_{ik} d_{i2}^{(k)}}{s_k d_{i1}^{(k)} d_{i1}^{(k)}} + v_{ik}^2 t_{0k}. \end{aligned}$$

В обозначениях (2.16), (2.17) выражения для ненулевых элементов a_{ij} , b_{ij} матриц A , B следующие:

$$\begin{aligned} a_{11} &= 1, a_{22} = -\frac{\gamma^2}{\delta^2} \sum_{k=1}^m s_k b_{11}^{(k)} t_{2k}, a_{23} = \frac{1}{\delta} \sum_{k=1}^m s_k b_{11}^{(k)} t_{1k}, a_{25} = \frac{1}{\delta} \sum_{k=1}^m s_k b_{11}^{(k)} \bar{r}_{11k}, \\ a_{32} &= -\frac{\gamma^2}{\delta} a_{23}, a_{33} = \frac{1}{\delta} \sum_{k=1}^m s_k b_{11}^{(k)} t_{0k}, a_{35} = \frac{1}{\delta} \sum_{k=1}^m s_k b_{11}^{(k)} \bar{r}_{10k}, a_{44} = \frac{1}{\delta} \sum_{k=1}^m s_k b_{33}^{(k)} t_{0k}, \\ a_{46} &= \frac{1}{\delta} \sum_{k=1}^m s_k b_{33}^{(k)} \bar{r}_{20k}, a_{52} = -\frac{\gamma^2}{\delta} a_{25}, a_{53} = a_{35}, a_{55} = \frac{1}{\delta} \sum_{k=1}^m s_k b_{11}^{(k)} r_{11k}, a_{64} = a_{46}, \\ a_{66} &= \frac{1}{\delta} \sum_{k=1}^m s_k b_{33}^{(k)} r_{22k}, a_{72} = \frac{\gamma}{\delta} \sum_{k=1}^m s_k b_{12}^{(k)} \left(t_{1k} - \gamma \cdot t_{2k} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right), \\ a_{73} &= -\frac{1}{\gamma} \sum_{k=1}^m s_k b_{12}^{(k)} \left(t_{0k} - \gamma \cdot t_{1k} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right), a_{75} = -\frac{1}{\gamma} \sum_{k=1}^m s_k b_{12}^{(k)} \left(\bar{r}_{10k} - \gamma \cdot \bar{r}_{11k} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right), \\ a_{77} &= 1, a_{84} = 2 \sum_{k=1}^m s_k b_{33}^{(k)} t_{1k} \frac{\partial}{\partial \varphi}, a_{86} = 2 \sum_{k=1}^m s_k b_{33}^{(k)} \bar{r}_{21k} \frac{\partial}{\partial \varphi}, a_{88} = 1, a_{99} = 1, a_{10,10} = 1, \\ a_{10,2} &= -\frac{\gamma^2}{\delta} \sum_{k=1}^m s_k b_{12}^{(k)} t_{1k} \frac{\partial}{\partial \varphi}, a_{10,3} = \sum_{k=1}^m s_k b_{12}^{(k)} t_{0k} \frac{\partial}{\partial \varphi}, a_{10,5} = \sum_{k=1}^m s_k b_{12}^{(k)} \bar{r}_{10k} \frac{\partial}{\partial \varphi}, \end{aligned}$$

$$a_{11,3} = -\frac{1}{\delta} \sum_{k=1}^m s_k b_{11}^{(k)} \bar{q}_{10k}, a_{11,4} = \sum_{k=1}^m s_k b_{33}^{(k)} \bar{r}_{10k} \frac{\partial}{\partial \varphi}, a_{11,5} = -\frac{1}{\delta} \sum_{k=1}^m s_k b_{11}^{(k)} q_{11k},$$

$$a_{11,6} = \sum_{k=1}^m s_k b_{33}^{(k)} r_{21k} \frac{\partial}{\partial \varphi}, a_{11,11} = 1, a_{12,2} = -\frac{\gamma^2}{\delta} \sum_{k=1}^m s_k b_{12}^{(k)} \bar{r}_{21k} \frac{\partial}{\partial \varphi},$$

$$a_{12,3} = \sum_{k=1}^m s_k b_{12}^{(k)} \bar{r}_{20k} \frac{\partial}{\partial \varphi}, a_{12,4} = -\frac{1}{\delta} \sum_{k=1}^m s_k b_{33}^{(k)} \bar{q}_{20k}, a_{12,5} = \sum_{k=1}^m s_k b_{12}^{(k)} r_{12k} \frac{\partial}{\partial \varphi},$$

$$a_{12,6} = -\frac{1}{\delta} \sum_{k=1}^m s_k b_{33}^{(k)} q_{22k}, a_{12,12} = 1.$$

$$b_{12} = 1, b_{21} = -\delta \cdot a_{72}, b_{24} = \frac{\delta}{\gamma^2} a_{10,2}, b_{25} = -\frac{\delta}{\gamma^2} a_{11,2}, b_{26} = \frac{\delta}{\gamma^2} a_{12,2}, b_{28} = 1,$$

$$b_{31} = \gamma^2 a_{73}, b_{34} = -a_{10,3}, b_{35} = a_{11,3}, b_{36} = -a_{12,3}, b_{39} = 1, b_{42} = \frac{\gamma^2}{\delta} a_{84},$$

$$b_{43} = -\delta a_{44} \frac{\partial}{\partial \varphi}, b_{45} = -a_{11,4}, b_{46} = a_{12,4}, b_{4,10} = 1, b_{51} = \gamma^2 a_{75}, b_{54} = -a_{10,5},$$

$$b_{55} = a_{11,5}, b_{56} = -a_{12,5}, b_{5,11} = 1, b_{62} = \frac{\gamma^2}{\delta} a_{86}, b_{63} = -\delta \cdot a_{46} \frac{\partial}{\partial \varphi}, b_{65} = -a_{11,6},$$

$$b_{66} = a_{12,6}, b_{6,12} = 1, b_{71} = \delta \sum_{k=1}^m s_k b_{22}^{(k)} \left(t_{0k} - 2\gamma \cdot t_{1k} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + \gamma^2 t_{2k} \frac{\partial^4}{\partial \varphi^4} \right),$$

$$b_{74} = \frac{\delta}{\gamma} \sum_{k=1}^m s_k b_{22}^{(k)} \left(t_{0k} - \gamma \cdot t_{1k} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right) \frac{\partial}{\partial \varphi}, b_{76} = \frac{\delta}{\gamma} \sum_{k=1}^m s_k b_{22}^{(k)} \left(\bar{r}_{20k} - \gamma \bar{r}_{21k} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right) \frac{\partial}{\partial \varphi},$$

$$b_{82} = 4\gamma^2 \sum_{k=1}^m s_k b_{33}^{(k)} t_{2k} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}, b_{83} = -2\delta \sum_{k=1}^m s_k b_{33}^{(k)} t_{1k} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}, b_{85} = -2\delta \sum_{k=1}^m s_k b_{33}^{(k)} \bar{r}_{11k} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2},$$

$$b_{86} = -2 \sum_{k=1}^m s_k b_{33}^{(k)} \bar{q}_{21k} \frac{\partial}{\partial \varphi}, b_{87} = 1, b_{9,10} = -\delta \frac{\partial}{\partial \varphi}, b_{10,4} = -\delta \sum_{k=1}^m s_k b_{22}^{(k)} t_{0k} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2},$$

$$b_{10,1} = -\gamma \cdot \delta \sum_{k=1}^m s_k b_{22}^{(k)} \left(t_{0k} - \gamma \cdot t_{1k} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right) \frac{\partial}{\partial \varphi}, b_{10,5} = -\sum_{k=1}^m s_k b_{12}^{(k)} \bar{q}_{10k} \frac{\partial}{\partial \varphi},$$

$$\begin{aligned}
b_{10,6} &= -\delta \sum_{k=1}^m s_k b_{22}^{(k)} \bar{r}_{20k} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}, b_{11,1} = \gamma \sum_{k=1}^m s_k b_{12}^{(k)} \left(\bar{q}_{10k} - \gamma \bar{q}_{11k} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right), \\
b_{11,2} &= 2\gamma^2 \sum_{k=1}^m s_k b_{33}^{(k)} \bar{r}_{11k} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}, b_{11,3} = -\delta \sum_{k=1}^m s_k b_{33}^{(k)} \bar{r}_{10k} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}, b_{11,4} = -b_{10,5}, \\
b_{11,5} &= \sum_{k=1}^m s_k \left(\frac{1}{\delta} b_{11}^{(k)} \eta_{1k} - \delta b_{33}^{(k)} r_{11k} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right) + \frac{9\delta}{\gamma^2} \sum_{k=1}^m \frac{t_{4,k} - 2t_{3,k} + t_{2,k}}{s_k d_{11}^{(k)}}, \\
b_{11,6} &= \sum_{k=1}^m s_k \left(b_{12}^{(k)} q_{12k} - b_{33}^{(k)} q_{21k} \right) \frac{\partial}{\partial \varphi}, b_{12,1} = -\gamma^2 b_{76}, b_{12,2} = \frac{\gamma^2}{\delta} b_{86}, \\
b_{12,3} &= \sum_{k=1}^m s_k b_{33}^{(k)} \bar{q}_{20k} \frac{\partial}{\partial \varphi}, b_{12,4} = -\delta \sum_{k=1}^m s_k b_{22}^{(k)} \bar{r}_{20k} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}, b_{12,5} = -b_{11,6}, \\
b_{12,6} &= \sum_{k=1}^m s_k \left(\frac{1}{\delta} b_{33}^{(k)} \eta_{2k} - \delta b_{22}^{(k)} r_{22k} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right) + \frac{9\delta}{\gamma^2} \sum_{k=1}^m \frac{t_{4,k} - 2t_{3,k} + t_{2,k}}{s_k d_{21}^{(k)}}.
\end{aligned}$$

Выражения для ненулевых элементов матрицы параметрических членов C :

$$\begin{aligned}
c_{71} &= -\delta \sum_{k=1}^m \bar{\rho}_k \left(t_{0k} - \gamma^2 t_{2k} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right), c_{74} = -\delta \sum_{k=1}^m \bar{\rho}_k t_{1k} \frac{\partial}{\partial \varphi}, c_{76} = -\delta \sum_{k=1}^m \bar{\rho}_k \bar{r}_{21k} \frac{\partial}{\partial \varphi}, \\
c_{82} &= \gamma^2 \sum_{k=1}^m \bar{\rho}_k t_{2k}, c_{83} = -\delta \sum_{k=1}^m \bar{\rho}_k t_{1k}, c_{85} = -\delta \sum_{k=1}^m \bar{\rho}_k \bar{r}_{11k}, c_{92} = -\frac{\gamma^2}{\delta} c_{83}, c_{10,4} = c_{93}, \\
c_{93} &= -\delta \sum_{k=1}^m \bar{\rho}_k t_{0k}, c_{95} = -\delta \sum_{k=1}^m \bar{\rho}_k \bar{r}_{10k}, c_{10,1} = \gamma^2 \delta c_{74}, c_{10,6} = -\delta \sum_{k=1}^m \bar{\rho}_k \bar{r}_{20k}, c_{11,3} = c_{95}, \\
c_{11,2} &= -\frac{\gamma^2}{\delta} c_{85}, c_{11,5} = -\delta \sum_{k=1}^m \bar{\rho}_k r_{11k}, c_{12,1} = -\gamma^2 c_{76}, c_{12,4} = c_{10,6}, c_{12,6} = -\delta \sum_{k=1}^m \bar{\rho}_k r_{22k}.
\end{aligned}$$

Отметим, что в системе (2.11)–(2.13) при предельном переходе (1.2.12) обращаются в нуль функции с номерами 5, 6, 11, 12, характеризующие поперечные деформации по толщине оболочки, а соответствующие им уравнения удовлетворяются тождественно. Поэтому, вычеркивая из матриц A ,

B , C строки и столбцы с этими номерами, получаем 8×8 матрицы коэффициентов уравнений классической теории оболочек.

Далее решение задачи (2.11)–(2.13) строим по указанной в § 1.4 схеме. Отметим, что в результате представления решения в форме (1.4.4) и перехода к системе обыкновенных дифференциальных уравнений (1.4.5) состав множеств I , R номеров компонент вектора u одинаковой четности относительно оператора дифференцирования по угловой переменной следующий:

$$I = \{4, 6, 10, 12\}, R = \{1 \leq n \leq 12\} \setminus I. \quad (2.18)$$

Аппроксимация (1.4.11) вектора u в методе Бубнова-Галеркина осуществлена при использовании ортонормированная координатная система вида

$$v_{kj}(x) = \sqrt{2k-1} P_{k-1}(2x-1) \cdot e_j, k = 1 \dots N, j \in J. \quad (2.19)$$

Здесь $P_k(x)$ – ортогональные на промежутке $[-1, 1]$ полиномы Лежандра; e_j – векторы стандартного ортонормированного базиса в пространстве R^{12} . Состав множества номеров ненулевых и нулевых столбцов матрицы C следующий:

$$J = \{1 \leq n \leq 6\}, K = \{7 \leq n \leq 12\}. \quad (2.20)$$

Таким образом, из (2.19), (2.20) получаем в (1.4.11) координатную систему, состоящую из $6N$ векторов. Это приводит к краевой задаче (1.4.15) относительно $12 \times 6N$ матрицы $Z(x)$. Следовательно, в силу (1.4.12)–(1.4.14), возникает необходимость решения алгебраической проблемы собственных значений для матрицы порядка $6N \times 6N$.

Значение параметра N , достаточное для обеспечения точности результата, определялось в результате численного исследования скорости сходимости метода. Результаты, проведенных расчетов представлены ниже.

2.2. ПАРАМЕТРИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ СОБСТВЕННЫХ ЧАСТОТ И СОБСТВЕННЫХ ФОРМ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ

В данном параграфе представлены результаты исследования влияния геометрических, физических и структурных параметров оболочки на значения шести низших собственных частот. Выявлена необходимость учета сдвиговых деформаций при расчете собственных частот и форм колебаний для широкой области изменения параметров оболочки.

2.2.1. СКОРОСТЬ СХОДИМОСТИ ЧИСЛЕННОГО РАСЧЕТА СОБСТВЕННЫХ ЧАСТОТ ОТНОСИТЕЛЬНО КОЛИЧЕСТВА ФУНКЦИЙ, ИСПОЛЬЗУЕМЫХ ПРИ АППРОКСИМАЦИИ РЕШЕНИЯ

В таблицах 2.1–2.3 приведены значения низших собственных частот $\omega_0, \dots, \omega_5$, позволяющие оценить скорость сходимости метода относительно числа используемых в аппроксимации (1.4.11) базисных векторов, т. е. относительно параметра N .

Рассматривается двухслойная композитная цилиндрическая оболочка, первый (внутренний) слой которой армирован в меридиональном направлении, а второй – в окружном. Принимались следующие значения параметров оболочки ($k = 1, 2$ – номер слоя):

— геометрические

$$R = 10 \text{ м}, l/R = 2, R/h = 20, h_k - h_{k-1} = 0.5h \quad (2.21)$$

— механические

$$E_k^c = 3000 \text{ МПа}, E_k^a = 250 \text{ ГПа}, \nu_k^c = \nu_k^a = 0.3, \quad (2.22)$$

$$\rho_k^c = 1250 \text{ кг/м}^3, \rho_k^a = 1710 \text{ кг/м}^3$$

— структурные

$$\omega_{l,k} = \omega_{z,k} = 0.5. \quad (2.23)$$

Данные, представленные в таблицах 2.1–2.2, соответствуют частотам осесимметричных колебаний ($n=0$) цилиндрической оболочки, заделка торцов которой либо жесткая (2.9а) (табл. 2.1), либо консольного типа (2.9б) (табл. 2.2).

Таблица 2.1

| Оценка скорости сходимости относительно параметра N частот осесимметричных колебаний жестко заземленной цилиндрической оболочки, Гц | | | | | | |
|---|------------|------------|------------|------------|------------|------------|
| N | ω_0 | ω_1 | ω_2 | ω_3 | ω_4 | ω_5 |
| 4 | 352.45 | 707.26 | 1 016.99 | 1 035.12 | 1462.90 | 1 512.56 |
| 6 | 352.35 | 704.72 | 1 015.59 | 1 026.65 | 1 071.24 | 1 086.31 |
| 8 | 352.35 | 704.71 | 1 015.59 | 1 026.58 | 1 057.29 | 1 059.32 |
| 10 | 352.35 | 704.71 | 1 015.59 | 1 026.58 | 1 057.06 | 1 058.59 |
| 12 | 352.35 | 704.71 | 1 015.59 | 1 026.58 | 1 057.06 | 1 058.58 |
| 14 | 352.35 | 704.71 | 1 015.59 | 1 026.58 | 1 057.06 | 1 058.58 |
| 16 | 352.35 | 704.71 | 1 015.59 | 1 026.58 | 1 057.06 | 1 058.58 |

Из этих таблиц видно, что процесс приближения к точным значениям собственных частот осуществляется сверху. Стабилизация вычисленных значений трех низших частот достигается при $N = 6$, четвертой – при $N = 8$, пятой – при $N = 10$, а шестой – при $N = 12$.

Таблица 2.2

| Оценка скорости сходимости относительно параметра N частот осесимметричных колебаний цилиндрической оболочки консольного типа, Гц | | | | | | |
|---|------------|------------|------------|------------|------------|------------|
| N | ω_0 | ω_1 | ω_2 | ω_3 | ω_4 | ω_5 |
| 4 | 88.10 | 265.00 | 400.00 | 467.20 | 517.70 | 526.40 |
| 6 | 88.09 | 264.30 | 397.10 | 441.10 | 515.60 | 515.60 |
| 8 | 88.09 | 264.30 | 397.10 | 440.50 | 506.00 | 510.20 |
| 10 | 88.09 | 264.30 | 397.10 | 440.40 | 505.60 | 508.00 |
| 12 | 88.09 | 264.30 | 397.10 | 440.40 | 505.60 | 508.00 |
| 14 | 88.09 | 264.30 | 397.10 | 440.40 | 505.60 | 508.00 |
| 16 | 88.09 | 264.30 | 397.10 | 440.40 | 505.60 | 508.00 |

Проведенные расчеты показали, что полученные данные характерны и сохраняются как при изменении коэффициента волнообразования n , так и при варьировании физико-механических, а также геометрических и структурных параметров оболочки. Так например, этот вывод подтверждают ре-

зультаты расчетов, представленных в таблице 2.3 и полученные при $n = 4$ для трехслойной жестко заземленной оболочки, собранной из изотропных слоев, со следующими физико-геометрическими характеристиками:

$$l/R = 5, R/h = 40, (h_1 - h_0) = (h_2 - h_1) = (h_3 - h_2), E_1/E_2 = 70. \quad (2.24)$$

Таблица 2.3

| Оценка скорости сходимости относительно параметра N частот жестко заземленной цилиндрической оболочки при $n = 4$ | | | | | | |
|--|------------|------------|------------|------------|------------|------------|
| N | ω_0 | ω_1 | ω_2 | ω_3 | ω_4 | ω_5 |
| 6 | 230.10 | 298.10 | 423.60 | 579.10 | 1298.00 | 1736.00 |
| 8 | 230.10 | 298.00 | 413.10 | 553.90 | 752.60 | 938.10 |
| 10 | 230.10 | 298.00 | 412.80 | 552.90 | 704.20 | 854.50 |
| 12 | 230.10 | 298.00 | 412.80 | 552.90 | 701.00 | 846.80 |
| 14 | 230.10 | 298.00 | 412.80 | 552.90 | 701.00 | 846.20 |
| 16 | 230.10 | 298.00 | 412.80 | 552.90 | 701.00 | 846.20 |

Эти результаты позволяют во всех дальнейших расчетах принять $N = 12$. Таким образом, в ходе численного интегрирования задачи определения частот и форм свободных колебаний цилиндрической оболочки, в силу (2.19), (2.20) приходится решать алгебраическую проблему собственных значений для матрицы размера 72×72 .

2.2.2. СОБСТВЕННЫЕ ФОРМЫ КОЛЕБАНИЙ КАК ФУНКЦИИ ПАРАМЕТРА ВОЛНООБРАЗОВАНИЯ

Анализ форм собственных колебаний выявил их зависимость как от условий закрепления торцов оболочки, так и от коэффициента волнообразования n .

В таблице 2.4 приведены данные об осесимметричных формах оболочки с параметрами (2.21)–(2.23) при краевых условиях (2.9а), (2.9б). Графики форм, соответствующих жестко заземленной оболочке (2.9а), представлены на рисунках 2.2–2.3. Формы собственных колебаний, приведенные на рисунках 2.5–2.7, получены для оболочки консольного типа (2.9б).

Для параметров окружного волнообразования больших нуля собственные формы в подавляющем большинстве случаев преимущественно изгибные. Так изгибными являются формы, представленные на рисунке 2.4. Они получены при $n = 4$ для оболочки с параметрами (2.24).

Таблица 2.4

| Типы осесимметричных форм оболочки (2.21)–(2.23) | | | | | | |
|--|------------|------------|------------|------------|------------|------------|
| крепление | ω_0 | ω_1 | ω_2 | ω_3 | ω_4 | ω_5 |
| (2.9а) | крутильные | | изгибные | | крутильные | изгибные |
| (2.9б) | крутильные | | продольные | крутильные | изгибные | изгибные |

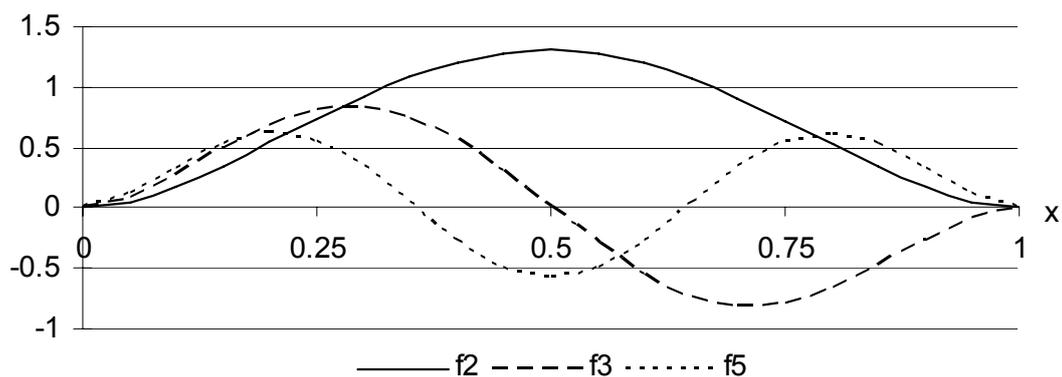


Рис. 2.2. Изгибные осесимметричные формы колебаний f_2, f_3, f_5 , соответствующие частотам $\omega_2, \omega_3, \omega_5$, жестко защемленной цилиндрической оболочки. Плоскость (x, y_1) .

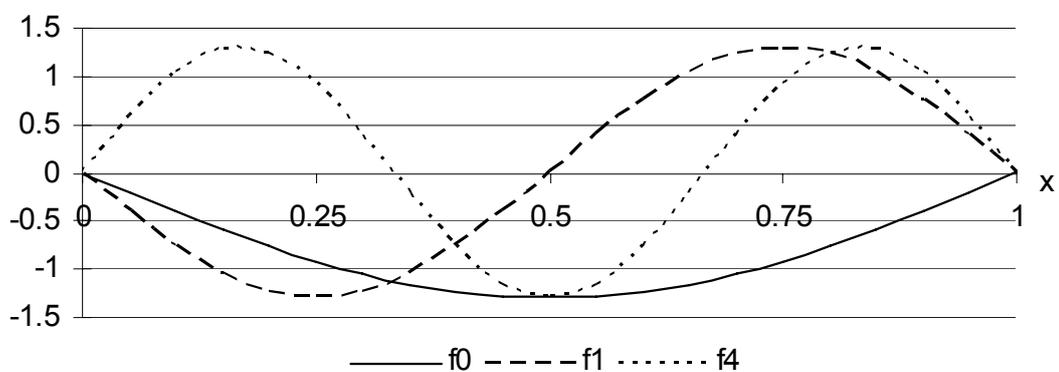


Рис. 2.3. Крутильные осесимметричные формы колебаний f_0, f_1, f_4 , соответствующие частотам $\omega_0, \omega_1, \omega_4$, жестко защемленной цилиндрической оболочки. Плоскость (x, y_4) .

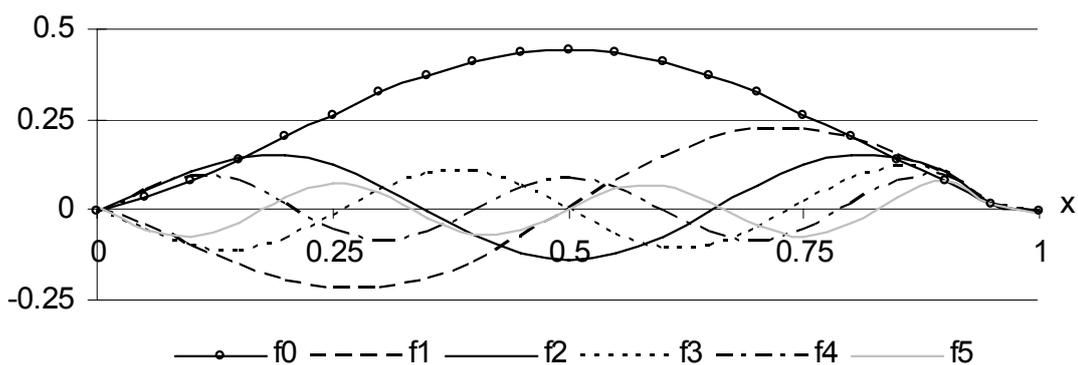


Рис. 2.4. Изгибные формы колебаний f_0-f_5 , соответствующие частотам $\omega_0-\omega_5$ при $n = 4$. Плоскость (x, y_1) .

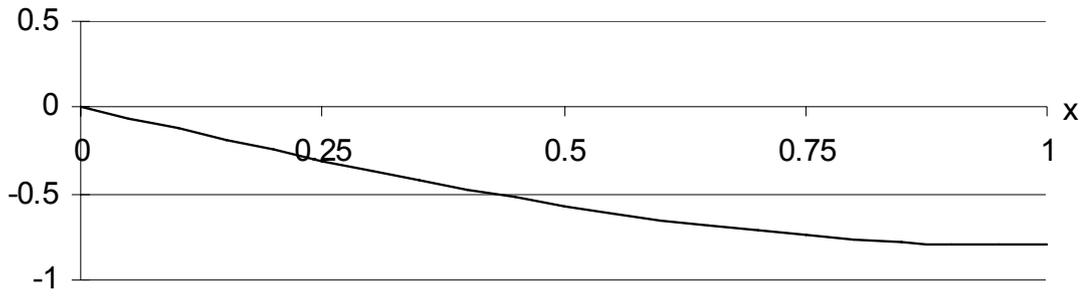


Рис. 2.5. Продольная осесимметричная форма колебаний f_2 , соответствующая частоте ω_2 , цилиндрической оболочки консольного типа. Плоскость (x, y_3) .

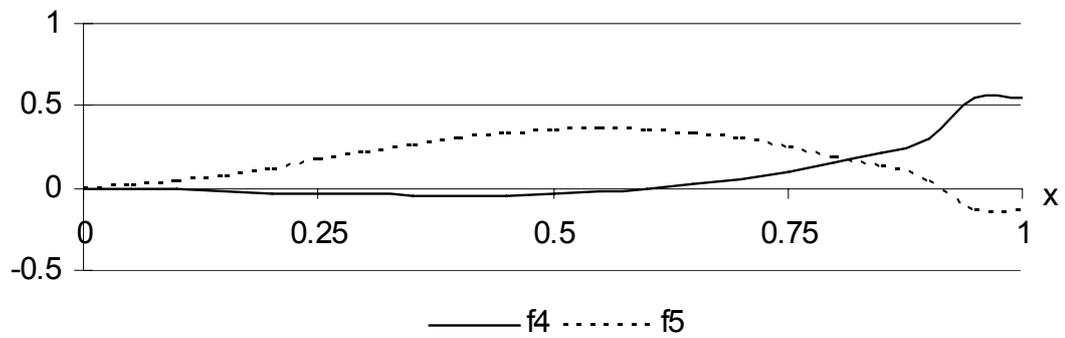


Рис. 2.6. Изгибные осесимметричные формы колебаний f_4 , f_5 , соответствующие частотам ω_4 , ω_5 , цилиндрической оболочки консольного типа. Плоскость (x, y_1) .

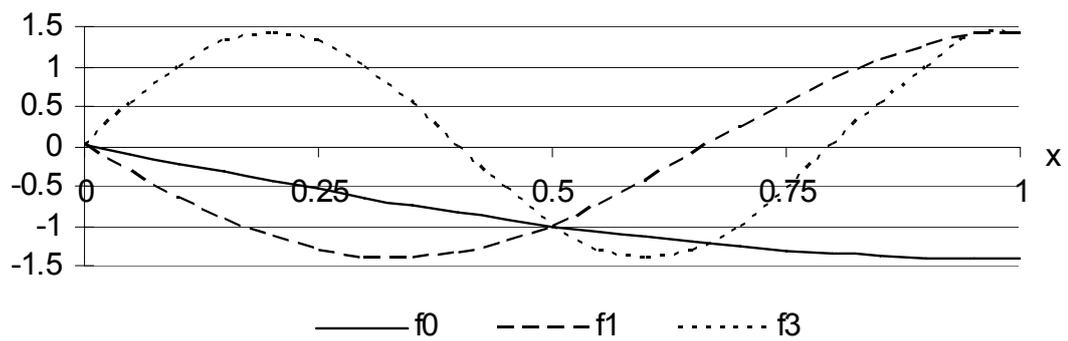


Рис. 2.7. Крутильные осесимметричные формы колебаний f_0 , f_1 , f_3 , соответствующие частотам ω_0 , ω_1 , ω_3 , цилиндрической оболочки консольного типа. Плоскость (x, y_4) .

2.2.3. ВЛИЯНИЕ ПАРАМЕТРА ВОЛНООБРАЗОВАНИЯ НА ЗНАЧЕНИЯ СОБСТВЕННЫХ ЧАСТОТ. ОЦЕНКА ЗНАЧИМОСТИ ПОПЕРЕЧНЫХ СДВИГОВ

Весь параметрический анализ, представленный ниже, проведен для жестко заземленной цилиндрической оболочки (2.9а).

В таблице 2.5 и на рисунке 2.8 приведены результаты расчета собственных частот ω_0 – ω_5 цилиндрической оболочки (2.21)–(2.23) как функций параметра волнообразования n . Анализ данных показывает, что неучет поперечных сдвиговых деформаций приводит к завышению расчетных значений собственных частот, которое увеличивается с ростом номера n . Так, если при $n = 0$ значение погрешности составляет менее процента, то для $n = 10$ оно около 10%.

Описанная тенденция наблюдается для пакетов различной структуры, что многократно подтверждают данные, представленные ниже (см. рис. 2.15–2.17).

Отметим, что все представленные частоты, рассматриваемые как функции параметра n , имеют минимумы, на наличие которых указано также в монографиях [30, 67, 384].

Таблица 2.5

| Зависимость низших собственных частот от параметра волнообразования, Гц | | | | | | | | | | | | |
|---|--|------------|------------|--------------------------------------|------------|------------|--|-------|-------|-------|-------|-------|
| n | неклассическая теория Андреева-Немировского | | | классическая теория Кирхгофа-Лява | | | погрешность от неучета сдвиговых деформаций, % | | | | | |
| | ω_0 | ω_1 | ω_2 | ω_0 | ω_1 | ω_2 | p_0 | p_1 | p_2 | p_3 | p_4 | p_5 |
| 0 | 352 | 705 | 1 016 | 352 | 705 | 1 016 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 2 | 172 | 340 | 518 | 172 | 342 | 524 | 0 | 1 | 1 | 2 | 4 | 6 |
| 4 | 184 | 279 | 420 | 186 | 283 | 429 | 1 | 2 | 2 | 4 | 5 | 7 |
| 6 | 347 | 398 | 499 | 356 | 410 | 516 | 3 | 3 | 3 | 5 | 6 | 8 |
| 8 | 589 | 623 | 696 | 617 | 653 | 731 | 5 | 5 | 5 | 6 | 7 | 9 |
| 10 | 891 | 917 | 972 | 954 | 982 | 1 043 | 7 | 7 | 7 | 8 | 8 | 10 |
| 12 | 1 242 | 1 263 | 1 307 | 1 362 | 1 385 | 1 435 | 10 | 10 | 10 | 10 | 10 | 11 |
| 14 | 1 632 | 1 651 | 1 688 | 1 837 | 1 858 | 1 900 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 14 |

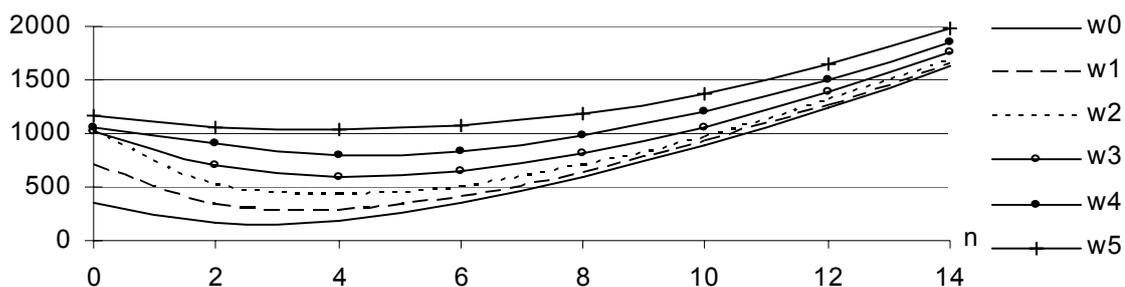


Рис. 2.8. Зависимость низших собственных частот ω_0 – ω_5 от параметра волнообразования n , Гц.

2.2.4. ВЛИЯНИЕ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ПАРАМЕТРОВ ОБОЛОЧКИ НА ЗНАЧЕНИЯ СОБСТВЕННЫХ ЧАСТОТ. ОЦЕНКА ЗНАЧИМОСТИ ПОПЕРЕЧНЫХ СДВИГОВЫХ ДЕФОРМАЦИЙ

2.2.4.1. ВАРЬИРОВАНИЕ ОТНОСИТЕЛЬНОЙ ТОЛЩИНЫ ОБОЛОЧКИ

Проведено исследование зависимости значений низших собственных частот $\omega_0, \dots, \omega_5$ от параметра R/h . В таблице 2.6 и на рисунках 2.9–2.11 представлены полученные результаты. На основе этих данных можно сделать следующие выводы:

1. Значения частот убывают при возрастании параметра R/h ;
2. Погрешности, вносимые неучетом сдвиговых деформаций, растут по мере уменьшения R/h . Так, максимальное значение погрешностей достигается при $R/h = 10$ и составляет менее 3% $n = 0$ (рис. 2.9), достигает 16% при $n = 2$ (рис. 2.10) и возрастает до 23% при $n = 4$ (рис. 2.11).

Таким образом, увеличение относительной толщины оболочки приводит к увеличению влияния сдвиговых деформаций.

Таблица 2.6

| Зависимость частот жестко защемленной оболочки от параметра R/h , Гц | | | | | | | | | | |
|--|------------------------------|------------|------------|------------|------------|----------------------|------------|------------|------------|------------|
| $n = 0$ | теория Андреева-Немировского | | | | | теория Кирхгофа-Лява | | | | |
| R/h | ω_0 | ω_2 | ω_3 | ω_4 | ω_5 | ω_0 | ω_2 | ω_3 | ω_4 | ω_5 |
| 10 | 352 | 1 020 | 1 053 | 1 057 | 1 143 | 352 | 1 020 | 1 053 | 1 059 | 1 173 |
| 20 | 352 | 1 016 | 1 027 | 1 057 | 1 059 | 352 | 1 016 | 1 027 | 1 057 | 1 062 |
| 30 | 352 | 1 015 | 1 020 | 1 037 | 1 057 | 352 | 1 015 | 1 020 | 1 037 | 1 057 |
| 40 | 352 | 1 014 | 1 017 | 1 028 | 1 048 | 352 | 1 014 | 1 017 | 1 028 | 1 049 |
| 60 | 352 | 1 014 | 1 015 | 1 021 | 1 031 | 352 | 1 014 | 1 015 | 1 021 | 1 031 |
| $n = 2$ | неклассическая теория | | | | | классическая теория | | | | |
| R/h | ω_0 | ω_2 | ω_3 | ω_4 | ω_5 | ω_0 | ω_2 | ω_3 | ω_4 | ω_5 |
| 10 | 202 | 655 | 940 | 1 258 | 1 601 | 205 | 701 | 1 045 | 1 460 | 1 650 |
| 20 | 172 | 518 | 707 | 915 | 1 147 | 172 | 524 | 723 | 949 | 1 212 |
| 30 | 164 | 478 | 632 | 790 | 959 | 164 | 480 | 637 | 800 | 978 |
| 40 | 161 | 462 | 600 | 734 | 869 | 161 | 463 | 602 | 738 | 877 |
| 60 | 158 | 449 | 574 | 687 | 792 | 158 | 449 | 575 | 688 | 794 |
| $n = 4$ | неклассическая теория | | | | | классическая теория | | | | |
| R/h | ω_1 | ω_2 | ω_3 | ω_4 | ω_5 | ω_1 | ω_2 | ω_3 | ω_4 | ω_5 |
| 10 | 191 | 281 | 397 | 533 | 682 | 202 | 307 | 451 | 630 | 840 |
| 20 | 131 | 197 | 280 | 378 | 492 | 133 | 201 | 289 | 398 | 527 |
| 30 | 109 | 164 | 229 | 304 | 390 | 109 | 165 | 232 | 310 | 402 |
| 40 | 100 | 149 | 205 | 267 | 337 | 100 | 150 | 206 | 269 | 341 |
| 50 | 95 | 141 | 191 | 246 | 305 | 95 | 141 | 192 | 247 | 308 |

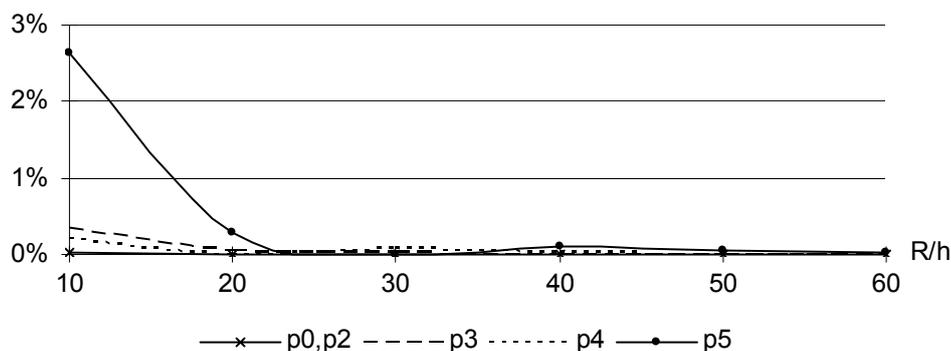


Рис. 2.9. Погрешности p_0, p_2-p_5 , вносимые неучетом сдвигов, в расчетные значения собственных частот $\omega_0, \omega_2-\omega_5$ как функции параметра R/h при $n = 0$.

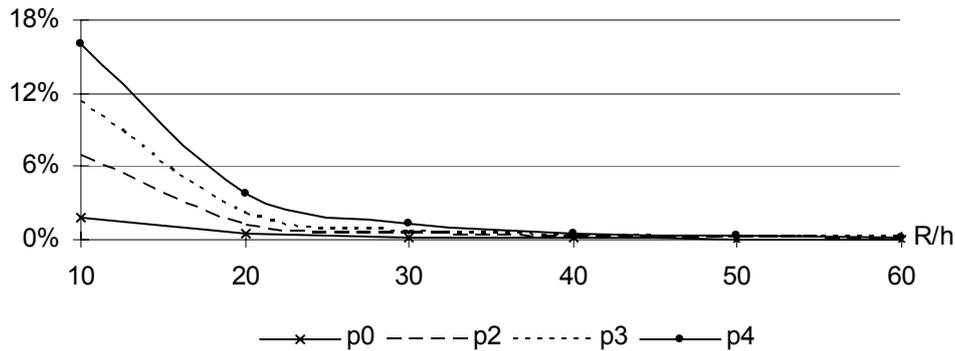


Рис. 2.10. Погрешности p_0 – p_4 , вносимые неучетом сдвигов, в расчетные значения собственных частот ω_0 – ω_4 как функции параметра R/h для $n = 2$.

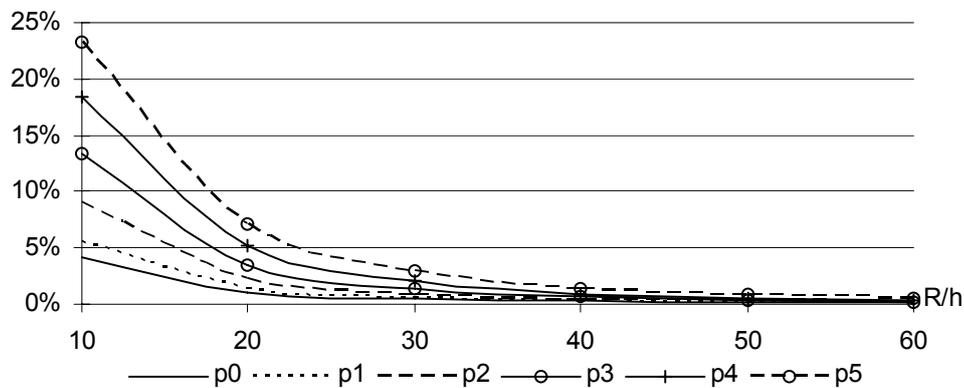


Рис. 2.11. Погрешности p_0 – p_5 , вносимые неучетом сдвигов, в расчетные значения собственных частот ω_0 – ω_5 как функции параметра R/h для $n = 4$.

2.2.4.2. ВАРЬИРОВАНИЕ ОТНОСИТЕЛЬНОЙ ДЛИНЫ ОБОЛОЧКИ

Результаты исследования зависимости низших собственных частот жестко закрепленной цилиндрической оболочки от параметра l/R представлены в таблице 2.7 и на рисунках 2.12–2.14. Резюмируя анализ полученных данных, можно говорить о том, что:

1. Значения низших частот осесимметричных форм колебаний возрастают при увеличении параметра. Однако для форм, соответствующих коэффициенту волнообразования $n = 2$ и $n = 4$, наблюдается обратный эффект, т. е. расчетные значения частот убывают при росте l/R .

2. Влияние сдвиговых деформаций наиболее значимо для «коротких» оболочек, т. е. при $l/R < 1$. Действительно, для оболочек с параметром $l/R = 0.5$ погрешность от неучета сдвига при расчете собственных частот достигает 15% при $n = 0$ (рис. 2.12), а в случаях $n = 2$ и $n = 4$ составляет 18% (рис. 2.13) и 23% (рис. 2.14) соответственно. По мере увеличения l/R наблюдается ослабление влияния поперечных деформаций. Так уже при $l/R = 1.5$ значение изучаемой погрешности составило менее 5% при $n = 0$ и $n = 2$, а при $n = 4$ снизилось до 15%.

Таблица 2.7

| Зависимость частот жестко закрепленной цилиндрической оболочки от параметра l/R , Гц | | | | | | | | | | |
|--|------------------------------|------------|------------|------------|------------|----------------------|------------|------------|------------|------------|
| $n = 0$ | теория Андреева-Немировского | | | | | теория Кирхгофа-Лява | | | | |
| l/R | ω_1 | ω_2 | ω_3 | ω_4 | ω_5 | ω_1 | ω_2 | ω_3 | ω_4 | ω_5 |
| 0.5 | 352 | 437 | 690 | 710 | 1 010 | 352 | 476 | 705 | 813 | 1 057 |
| 1 | 513 | 547 | 634 | 705 | 788 | 513 | 549 | 649 | 708 | 830 |
| 1.5 | 705 | 762 | 774 | 808 | 876 | 705 | 762 | 775 | 811 | 885 |
| 4 | 705 | 1 057 | 1 409 | 1 589 | 1 762 | 705 | 1 057 | 1 409 | 1 589 | 1 762 |
| $n = 2$ | неклассическая теория | | | | | классическая теория | | | | |
| l/R | ω_1 | ω_2 | ω_3 | ω_4 | ω_5 | ω_1 | ω_2 | ω_3 | ω_4 | ω_5 |
| 0.5 | 403 | 650 | 682 | 883 | 1 004 | 412 | 656 | 798 | 1006 | 1 185 |
| 1 | 335 | 510 | 714 | 957 | 1 081 | 339 | 526 | 757 | 1 047 | 1 185 |
| 2 | 322 | 478 | 632 | 790 | 959 | 323 | 480 | 637 | 800 | 978 |
| 4 | 313 | 473 | 629 | 782 | 933 | 313 | 474 | 630 | 784 | 936 |
| $n = 4$ | неклассическая теория | | | | | классическая теория | | | | |
| l/R | ω_1 | ω_2 | ω_3 | ω_4 | ω_5 | ω_1 | ω_2 | ω_3 | ω_4 | ω_5 |
| 1 | 314 | 538 | 807 | 1114 | 1348 | 332 | 591 | 927 | 1334 | 1647 |
| 1.5 | 180 | 291 | 428 | 590 | 773 | 184 | 303 | 457 | 646 | 871 |
| 2 | 131 | 197 | 280 | 378 | 492 | 33 | 201 | 289 | 398 | 527 |
| 2.5 | 107 | 151 | 207 | 273 | 350 | 109 | 153 | 211 | 282 | 365 |
| 3.5 | 87 | 110 | 140 | 176 | 219 | 88 | 111 | 142 | 179 | 223 |

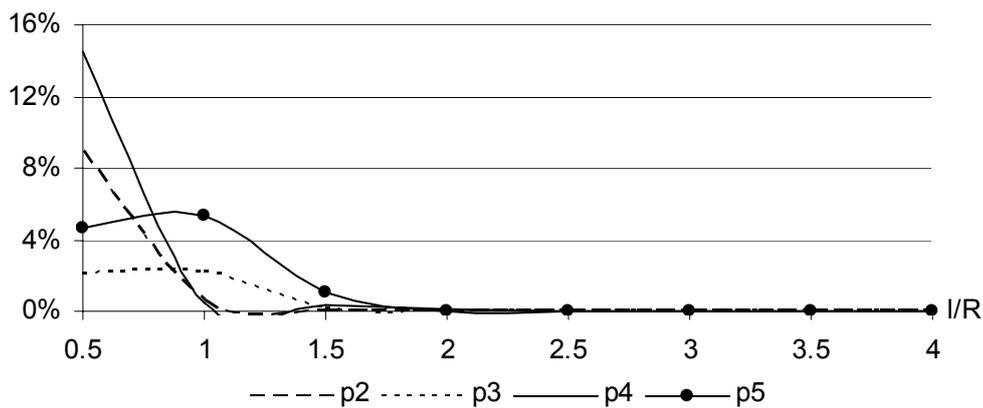


Рис. 2.12. Погрешности p_2 – p_5 , вносимые неучетом сдвигов, в расчетные значения собственных частот ω_2 – ω_5 как функции параметра l/R при $n = 0$.

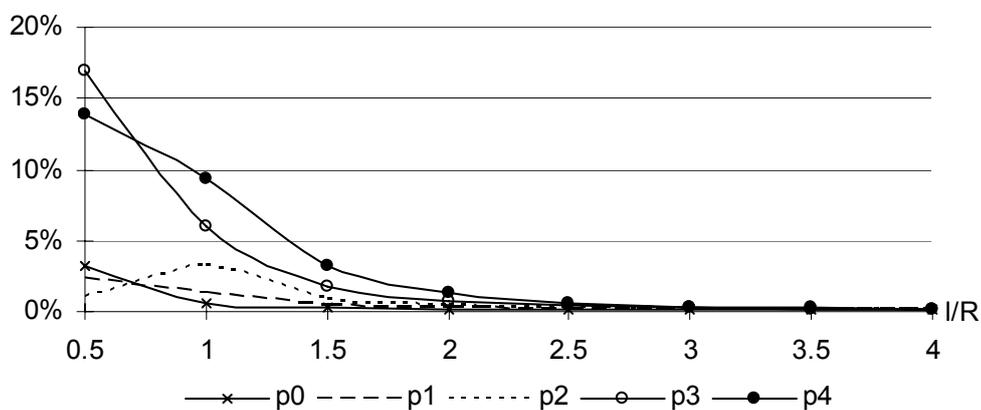


Рис. 2.13. Погрешности p_0 – p_4 , вносимые неучетом сдвигов, в расчетные значения собственных частот ω_0 – ω_4 как функции параметра l/R для $n = 2$.

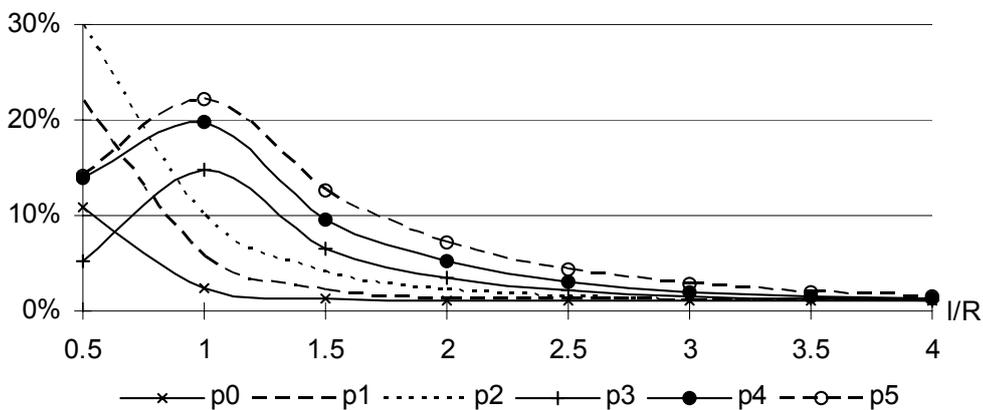


Рис. 2.14. Погрешности p_0 – p_5 , вносимые неучетом сдвигов, в расчетные значения собственных частот ω_0 – ω_5 как функции параметра l/R для $n = 4$.

2.2.5. ВЛИЯНИЕ ЖЕСТКОСТНЫХ ХАРАКТЕРИСТИК ПАКЕТА НА ЗНАЧЕНИЯ СОБСТВЕННЫХ ЧАСТОТ. ОЦЕНКА ЗНАЧИМОСТИ ПОПЕРЕЧНЫХ СДВИГОВЫХ ДЕФОРМАЦИЙ

2.2.5.1. ВАРЬИРОВАНИЕ ИНТЕНСИВНОСТИ АРМИРОВАНИЯ СЛОЕВ КОМПОЗИТА ПРИ НЕИЗМЕННЫХ ПАРАМЕТРАХ ЕГО КОМПОНЕНТ

Ниже исследовано влияние интенсивности армирования в плоскости слоя ω_l (1.1.1) на значения низших частот, а также на погрешность, обусловленную неучетом сдвига. При этом интенсивность армирования по высоте элемента ω_z не изменялась и определялась по формуле (2.23), остальные характеристики определялись (2.21), (2.22) за исключением $R/h = 40$. При различных коэффициентах волнообразования n рассматривались ниже перечисленные варианты интенсивности армирования ω_l :

$$(a) \omega_l = 0.1; \quad (2.25)$$

$$(б) \omega_l = 0.5;$$

$$(в) \omega_l = 0.9;$$

$$(г) \omega_l = 0.1 + 0.8x, 0 \leq x \leq 1.$$

Укладка слоев в пакете реализовывалась по одному из двух типов:

(А): нечетные слои армированы вдоль меридианов, (2.26А)
четные – по окружности;

(В): нечетные слои армированы по окружности, (2.26В)
четные – вдоль меридианов.

На рисунках 2.15–2.19 и в таблицах 2.8–2.9 приведены результаты, полученные при варьировании интенсивности ω_l меридионально армированных слоев, при этом интенсивность окружного армирования $\omega_l = 0.5$. Расчеты проведены для трехслойных жестко защемленных цилиндриче-

ских оболочек. Данные, соответствующие пакету типа (В) приведены на рис. 2.15 и в табл. 2.9, пакету типа (А) – на рис. 2.16–2.17 и в табл. 2.8.

Таблица 2.8

| Погрешности p_0 – p_5 расчетных значений собственных частот ω_0 – ω_5 , обусловленные неучетом сдвиговых деформаций для пакета типа (2.26А), % | | | | | | | |
|--|----------------------|-------|----------------------|-------|----------------------|-------|---------|
| $n = 0$ | p_0 | p_1 | p_2 | p_3 | p_4 | p_5 | max–min |
| (а) | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0.1 | 0.1 |
| (б) | 0 | 0 | 0 | 0.1 | 0.5 | 1.6 | 1.6 |
| (в) | 0 | 0 | 0.1 | 1 | 1 | 3.3 | 3.3 |
| (г) | 0 | 0 | 0 | 0 | 0.3 | 1.2 | 1.2 |
| $n = 4$ | p_0 | p_1 | p_2 | p_3 | p_4 | p_5 | |
| (а) | 0.3 | 0.4 | 0.6 | 0.9 | 1.5 | 2.2 | 1.9 |
| (б) | 0.8 | 1.7 | 3 | 5 | 7.7 | 11 | 10.2 |
| (в) | 1.3 | 2.5 | 4.7 | 7.8 | 12 | 17 | 15.7 |
| (г) | 0.5 | 1.3 | 2.4 | 4 | 6.4 | 9 | 8.5 |
| $n = 8$ | p_0 | p_1 | p_2 | p_3 | p_4 | p_5 | |
| (а) | 0.7 | 0.7 | 1 | 1.5 | 2.2 | 3 | 2.3 |
| (б) | 0.9 | 1.7 | 3.5 | 5.8 | 8.8 | 12 | 11.1 |
| (в) | 1.9 | 3.3 | 6 | 9.7 | 14.2 | 19.3 | 17.2 |
| (г) | 0.9 | 1.5 | 2.9 | 5 | 7.5 | 10.5 | 9.4 |
| min–max% | диапазон при $n = 0$ | 0–3% | диапазон при $n = 4$ | 0–17% | диапазон при $n = 8$ | 0–19% | |

Таблица 2.9

| Погрешность p_0 – p_5 расчетных значений собственных частот ω_0 – ω_5 от неучета сдвиговых деформаций для пакета типа (2.26В), % | | | | | | | |
|--|----------------------|-------|----------------------|-------|----------------------|-------|---------|
| $n = 8$ | p_0 | p_1 | p_2 | p_3 | p_4 | p_5 | max–min |
| (а) | 7.4 | 7.3 | 7 | 6.8 | 6.4 | 6 | 1.4 |
| (б) | 6.4 | 6.3 | 6 | 5.7 | 5.4 | 5 | 1.4 |
| (в) | 5.4 | 5.3 | 5 | 4.7 | 4.4 | 4 | 1.4 |
| (г) | 6.4 | 6.4 | 6 | 6.8 | 5.4 | 5 | 1.4 |
| min–max% | диапазон при $n = 0$ | < 1% | диапазон при $n = 4$ | 1–2% | диапазон при $n = 8$ | 4–7% | |

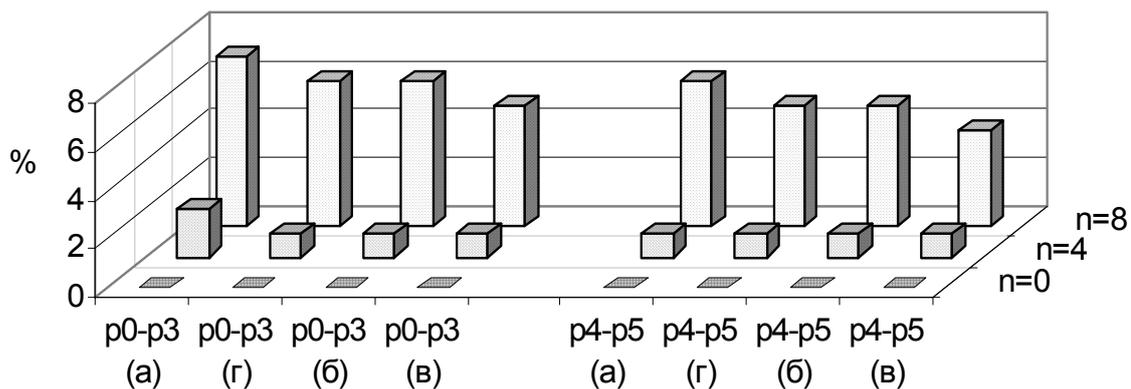


Рис. 2.15. Погрешности p_0-p_5 вычисления собственных частот $\omega_0-\omega_5$, вносимые при неучете сдвига, как функция параметра n . Структура пакета типа (В), армирование по (а)-(г).

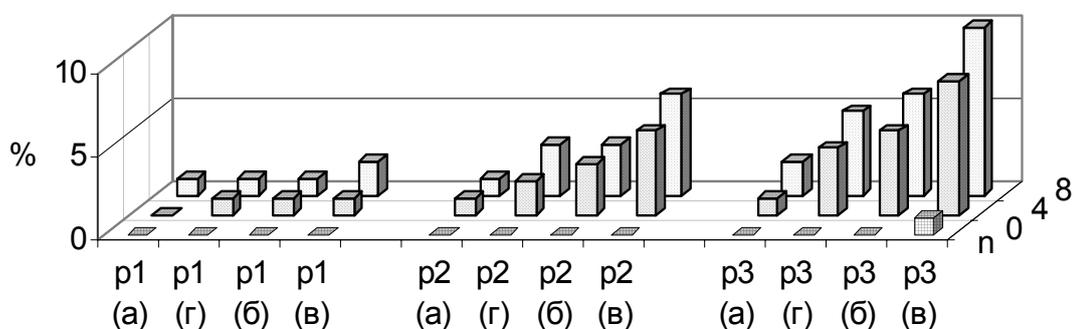


Рис. 2.16. Погрешности p_1-p_3 ($p_0 = p_1$) вычисления собственных частот $\omega_1-\omega_3$, вносимые при неучете сдвига, как функция параметра n . Структура пакета типа (А), армирование по (а)-(г).

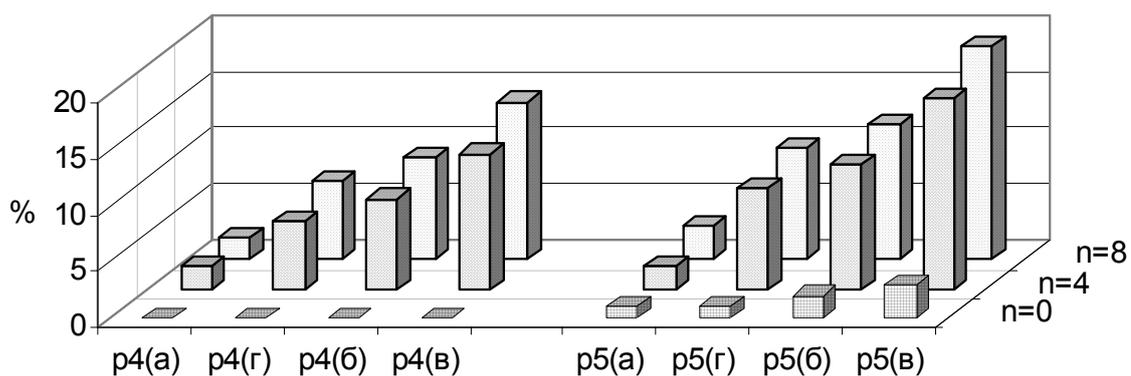


Рис. 2.17. Погрешности p_4-p_5 вычисления собственных частот $\omega_4-\omega_5$, вносимые при неучете сдвига, как функция параметра n . Структура пакета типа (А), армирование по (а)-(г).

Анализируя рисунки 2.15–2.17 и таблицы 2.8–2.9, относительно влияния сдвиговых деформаций на значения низших собственных частот можно сделать следующие выводы:

1. Общая тенденция, отмеченная при рассматриваемых типах укладки и значениях интенсивности ω_l , – это увеличение погрешности с ростом параметра волнообразования n .

2. Независимо от рассматриваемого параметра n изменение интенсивности ω_l меридионального армирования заполнителя при сохранении параметров несущих слоев (тип пакета (2.26В), табл. 2.9) характеризуется стабильным уровнем значимости, до 7.5%, сдвиговых деформаций. Так, при $n = 8$ диапазон изучаемой погрешности составляет от 4% до 7.4%, т.е. его ширина около 3% (табл. 2.9). Для рассматриваемого случая, распределение погрешностей относительно частот ω_0 – ω_5 можно считать равномерным.

Иная картина возникает при изменении интенсивности ω_l меридионального армирования несущих слоев при сохранении параметров заполнителя (тип пакета (2.26А), табл. 2.8). Значимость учета поперечных деформаций существенно возрастает при увеличении жесткости слоев. В частности, при $n = 8$ диапазон изучаемой погрешности составляет от 0% до 17%, а переход от варианта армирования (а) к (в) уменьшает точность вычислений, обусловленную неучетом сдвига, для частоты ω_4 с 2% до 14%, для ω_5 – с 3% до 20%. Здесь же наблюдается существенно различное влияние сдвиговых деформаций на значения низших собственных частот ω_0 , ω_1 (до 3%) и частоты ω_4 , ω_5 (до 19%).

3. Независимо от структуры пакета и параметра n реализация меридионального армирования с интенсивностями (2.22б) и (2.22г), т.е. использование линейного закона вдоль образующей либо постоянной «средней»

интенсивности, определяет пакеты, для которых уровень значимости сдвиговых деформаций совпадает с точностью до 0.1%.

4. Независимо от числа окружных волн n наибольшее (наименьшее) влияние поперечного сдвига при укладке (А) соответствует тому варианту армирования, при котором при укладке (В) достигается его наименьшая (наибольшая) степень. Например, из таблицы 2.9 следует, что для пакета типа (В), максимальная погрешность соответствует варианту (а) (заполнитель менее жесткий, чем несущие слои), минимальная – (в), т. е. несущие слои податливее заполнителя. Соответственно в таблице 2.8 для пакета типа (А) наибольшее влияние сдвига зафиксировано при интенсивности армирования (в), а наименьшее при (а).

Анализ этих данных дает основание считать, что в рассматриваемом случае степень влияния поперечных сдвигов при варьировании интенсивности армирования заполнителя ниже, чем при изменении интенсивности армирования несущих слоев.

Иллюстрация влияния интенсивности армирования на значения собственных частот оболочек структуры (В) и (А) представлена в таблице 2.10 и на рисунках 2.18, 2.19 соответственно. Значение параметра $n = 8$. Таблица 2.10 отражает возможность увеличения значений низших частот пакетов (2.26) в результате изменения интенсивности меридионального армирования ω_l по вариантам (2.25) либо несущих слоев, т. е. (2.26А), либо заполнителя, т. е. (2.26В). Данные, приведенные в таблице, рассчитывались по формуле (1.2.13), где в качестве z использовано минимальное, а в качестве a максимальное расчетное значение частоты. На их основе можно сформулировать следующие выводы:

1. При увеличении интенсивности меридионального армирования слоев пакетов (2.26А), (2.26В) расчетные значения частот ω_0 – ω_5 либо постоянны, либо увеличиваются.

2. Более значимого и эффективного изменения значений собственных частот можно добиться при изменении интенсивности меридионального армирования несущих слоев, по сравнению с изменением меридионального армирования заполнителя. В частности, при $n = 8$ в первом случае (рис. 2.19) при увеличении ω_l от 0.1 до 0.9, значение частоты ω_0 увеличивается на 72.8%, а частот ω_4 , ω_5 – на 102% (табл. 2.10). Во втором случае (рис. 2.18) в результате аналогичного перехода значение частоты ω_0 изменяется в пределах 0.36%, а частоты ω_5 до 9.6%.

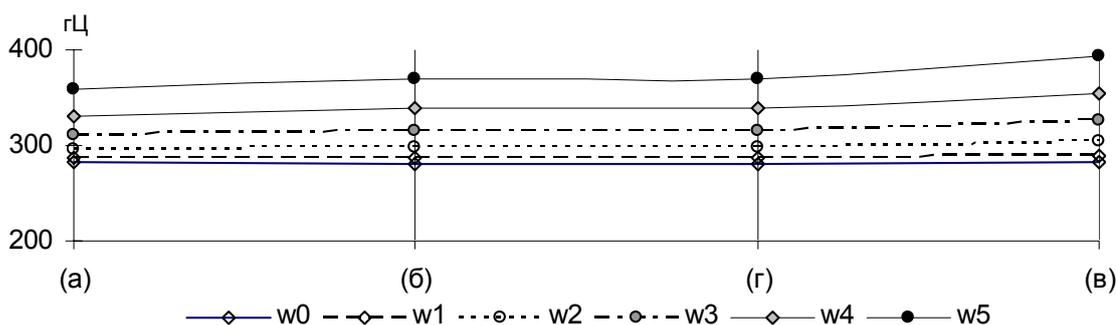


Рис. 2.18. Зависимость частот ω_0 – ω_5 от типа армирования (а)–(г) в пакете структуры (В) при $n = 8$.

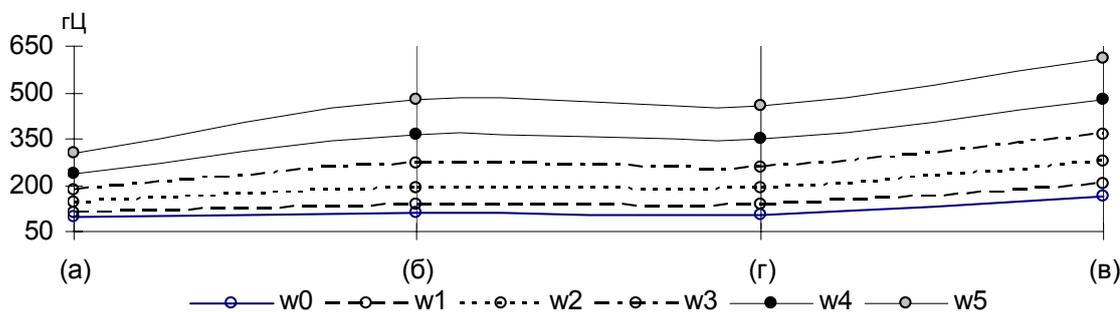


Рис. 2.19. Зависимость частот ω_0 – ω_5 от типа армирования (а)–(г) в пакете структуры (А) при $n = 8$.

Таблица 2.10

| Процент, на который можно увеличить значение низших собственных частот пакетов (2.26), в результате изменения интенсивности меридионального армирования слоев при реализации вариантов (2.25), % | | | | | | | | | | | | |
|--|--|------------|------------|------------|------------|------------|---|------------|------------|------------|------------|------------|
| $n \backslash \omega_k$ | пакет типа (2.26А), меридионально армированные несущие слои | | | | | | пакет типа (2.26В), меридионально армированный наполнитель | | | | | |
| | ω_0 | ω_1 | ω_2 | ω_3 | ω_4 | ω_5 | ω_0 | ω_1 | ω_2 | ω_3 | ω_4 | ω_5 |
| $n = 0$ | 71 | 48 | 14 | 19 | 27 | 25 | 38 | 38 | 50 | 17 | 3 | 3 |
| $n = 4$ | 84 | 88 | 90 | 92 | 93 | 94 | 10 | 22 | 27 | 28 | 21 | 19 |
| $n = 8$ | 73 | 83 | 4 | 100 | 102 | 102 | 0 | 1 | 3 | 5 | 7 | 10 |

Обобщая представленные выше результаты, проанализируем совокупное влияние укладки слоев и интенсивности их армирования на значения низших собственных частот при $n = 8$. Полученные данные представлены на рисунке 2.20. С целью упрощения ссылки, введен бинарный параметр

$$(\langle \text{тип пакета} \rangle, \omega_{1l} - \omega_{2l} - \omega_{3l}),$$

где «тип пакета» определяет направление армирования слоев по (2.26), а ω_{kl} – интенсивность армирования в плоскости k -го слоя, $k = 1, 2, 3$, которая определятся по (2.25) варианты (а)–(в).

Например, (А,а-б-а) будет соответствовать трехслойной оболочке, внешние слои которой армированы вдоль меридианов с интенсивностью $\omega_l = 0,1$, а средний слой армирован вдоль окружности с $\omega_l = 0,5$.

Из рисунка 2.20, следует, что значения низших частот ω_0 и ω_1 в большей степени определяется укладкой пакета и при одинаковой интенсивности армирования значения частот могут различаться в 2–3 раза:

$$\omega_{0,(B,\delta-a-\delta)} : \omega_{0,(A,\delta-a-\delta)} \cong 2.9, \quad \omega_{0,(B,\delta-\delta-\delta)} : \omega_{0,(A,\delta-\delta-\delta)} \cong 2.6;$$

$$\omega_{1,(B,\delta-a-\delta)} : \omega_{1,(A,\delta-a-\delta)} \cong 2.3, \quad \omega_{1,(B,\delta-\delta-\delta)} : \omega_{1,(A,\delta-\delta-\delta)} \cong 2.1;$$

при этом только изменение интенсивности армирования менее существенно:

$$\omega_{0,(A,a-b-a)} : \omega_{0,(A,b-a-b)} \cong 1.0, \omega_{0,(A,b-b-b)} : \omega_{0,(A,b-b-b)} \cong 1.4;$$

$$\omega_{1,(A,a-b-a)} : \omega_{1,(A,b-a-b)} \cong 0.9, \omega_{1,(A,b-b-b)} : \omega_{1,(A,b-b-b)} \cong 1.4.$$

Однако на значение старших частот ω_4 – ω_5 большее влияние оказывает интенсивность армирования слоев, поскольку при изменении жесткости несущих слоев значение частоты изменяется в 1.5 раза. Например,

$$\omega_{4,(A,b-b-b)} : \omega_{4,(A,a-b-a)} \cong 1.6, \omega_{4,(A,b-b-b)} : \omega_{4,(A,b-a-b)} \cong 1.5;$$

$$\omega_{5,(A,b-b-b)} : \omega_{5,(A,a-b-a)} \cong 1.6, \omega_{5,(A,b-b-b)} : \omega_{5,(A,b-a-b)} \cong 1.6;$$

при этом только изменение направления армирования незначительно:

$$\omega_{4,(B,b-a-b)} : \omega_{4,(A,b-a-b)} \cong 0.9, \omega_{4,(B,b-b-b)} : \omega_{4,(A,b-b-b)} \cong 0.9;$$

$$\omega_{5,(B,b-a-b)} : \omega_{5,(A,b-a-b)} \cong 0.8, \omega_{5,(B,b-b-b)} : \omega_{5,(A,b-b-b)} \cong 0.8.$$

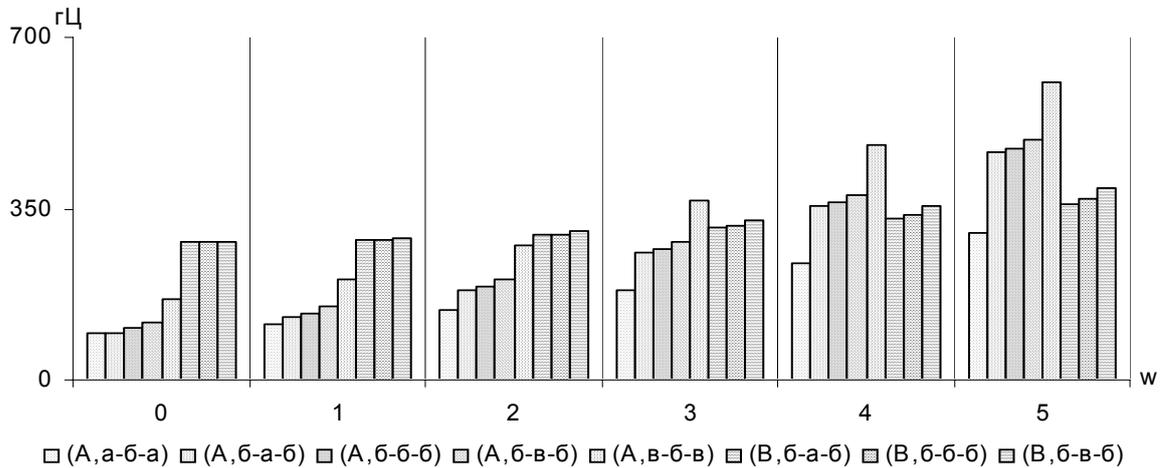


Рис. 2.20. Зависимость собственных частот от структуры пакета при $n = 8$.

Влияние интенсивности армирования слоев на осесимметричные формы собственных колебаний цилиндрической оболочки в некоторой степени иллюстрируют графики, представленные на рисунках 2.21–2.29. Данные получены для пакета типа (2.26В), т. е. изменялась интенсивность армирования заполнителя.

Можно отметить, что формы f_0 , f_1 , определяемые первыми частотами ω_0 , ω_1 будут крутильными при всех вариантах армирования (рис. 2.21). В формах f_2 – f_5 , соответствующих частотам ω_2 – ω_5 , более ярко выражено

влияние интенсивности заполнителя. Формы, представленные на рисунках 2.22–2.25, получены при $\omega_l = 0.5$ и $\omega_l = 0.8 + 0.1x$ (варианты «средней» интенсивности), на рисунках 2.26–2.29 при $\omega_l = 0.1$ и $\omega_l = 0.9$. Типы рассматриваемых осесимметричных собственных форм приведены в таблице 2.11.

Таблица 2.11

| Типы осесимметричных собственных форм 3 ^x -слойного пакета (2.26В) | | | | |
|---|-----------------------|------------|-----------------------|--|
| $\omega_l \backslash \omega_k$ | $\omega_0 - \omega_1$ | ω_2 | $\omega_3 - \omega_5$ | примечания |
| (а) | крутильные | | | – симметричные относительно $x = 0.5$; |
| (б) | | | | – наибольшие прогибы |
| (в) | | изгибные | | – симметричные относительно $x = 0.5$, т. е. середины пролета оболочки; |
| (г) | | | | – наименьшие прогибы |
| | | | | – максимальные прогибы смещены в менее жесткую часть |

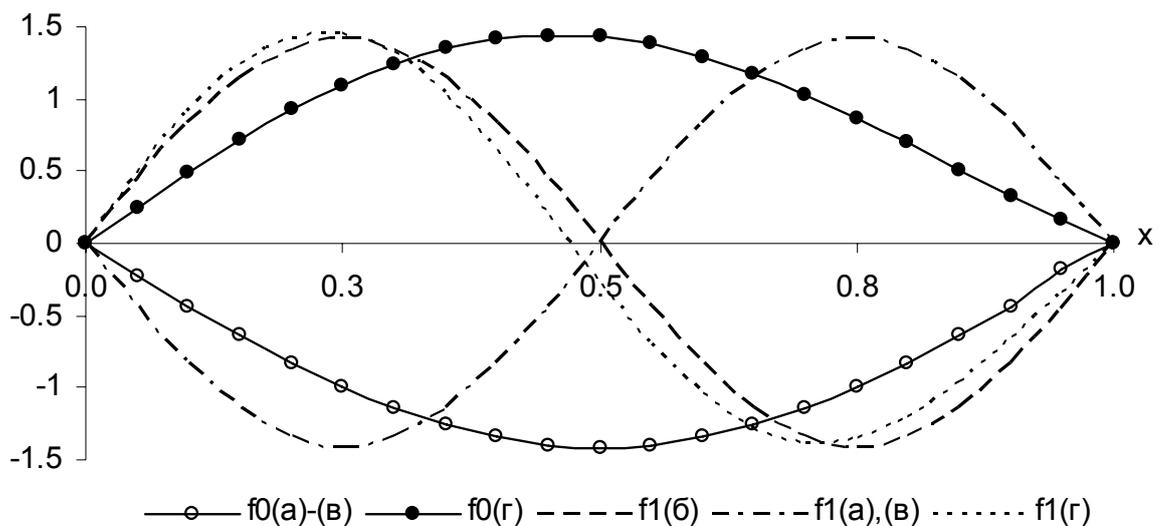


Рис. 2.21. Крутильные осесимметричные формы f_0 , f_1 , соответствующие частотам ω_0 , ω_1 , для пакетов (В) с интенсивностью армирования заполнителя (а)–(г). Плоскость $(x, 10 \cdot u_\varphi)$.

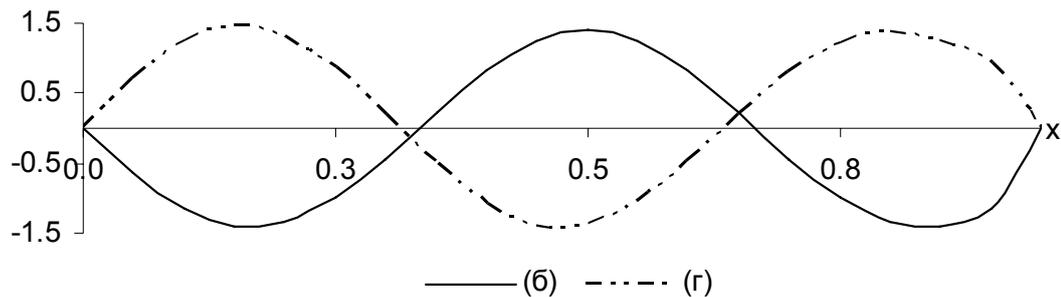


Рис. 2.22. Крутильная осесимметричная форма f_2 , соответствующая частоте ω_2 , для пакетов (В,б-б-б) и (В,б-г-б). Плоскость $(x, 10 \cdot u_\varphi)$.

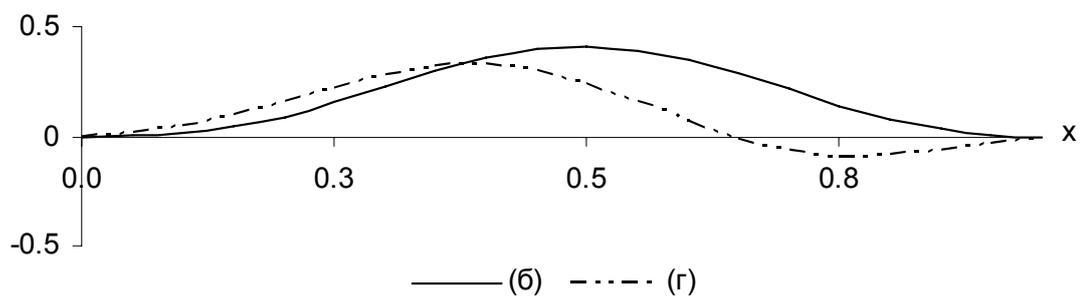


Рис. 2.23. Изгибная осесимметричная форма f_3 , соответствующая частоте ω_3 , для пакетов (В,б-б-б) и (В,б-г-б). Плоскость $(x, 4 \cdot w)$.

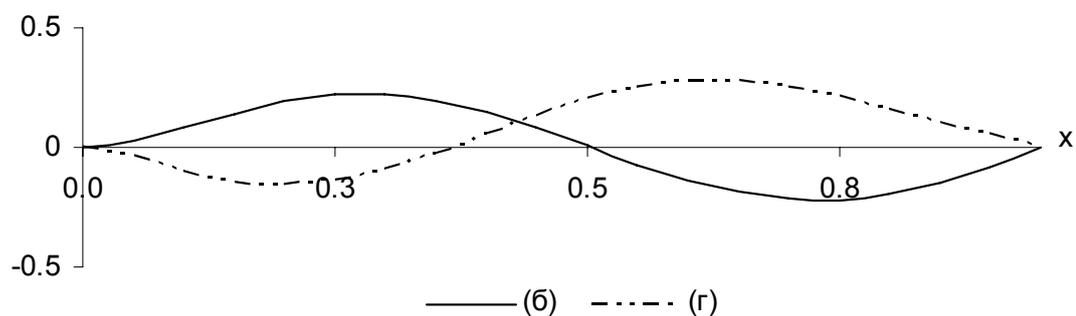


Рис. 2.24. Изгибная осесимметричная форма f_4 , соответствующая частоте ω_4 , для пакетов (В,б-б-б) и (В,б-г-б). Плоскость $(x, 4 \cdot w)$.

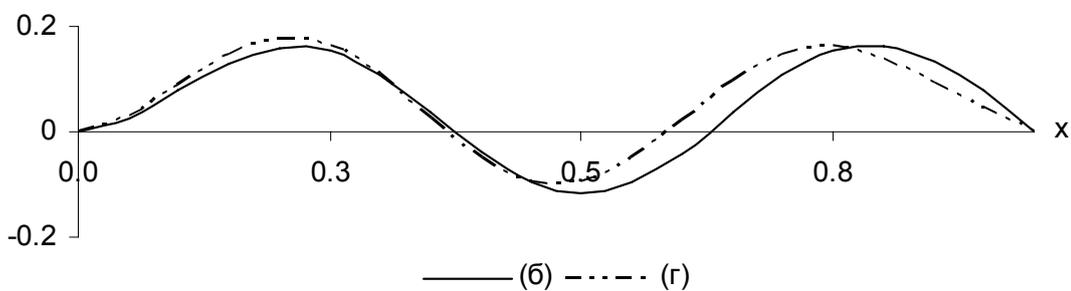


Рис. 2.25. Изгибная осесимметричная форма f_5 , соответствующая частоте ω_5 , для пакетов (В,б-б-б) и (В,б-г-б). Плоскость $(x, 4 \cdot w)$.

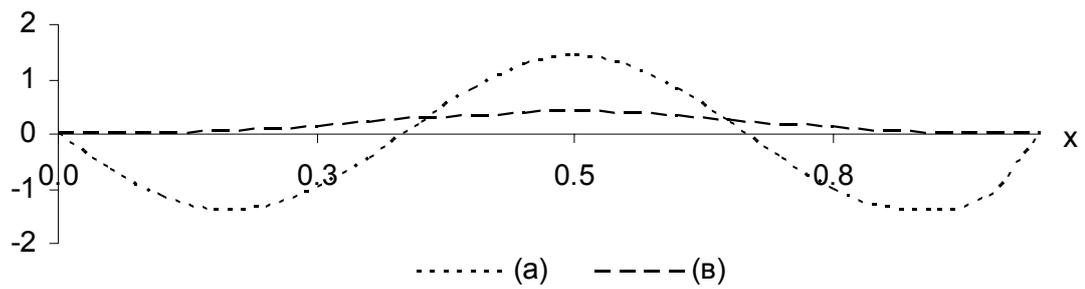


Рис. 2.26. Осесимметричная форма f_2 , соответствующая частоте ω_2 , для пакетов (В,б-а-б) – крутильная, $(x, 10 \cdot u_\varphi)$; (В,б-в-б) – изгибная, $(x, 4 \cdot w)$.

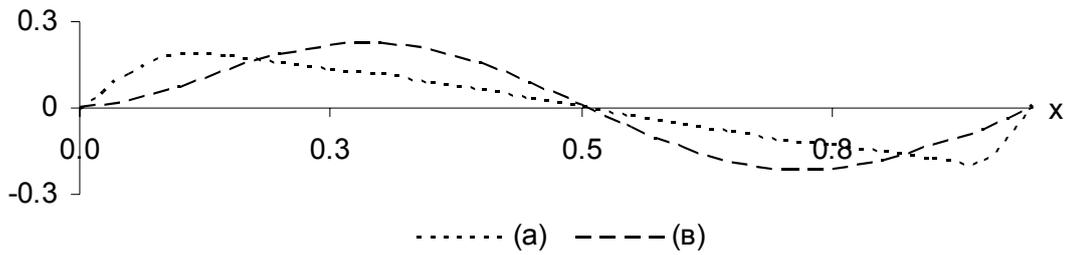


Рис. 2.27. Изгибная осесимметричная форма f_3 , соответствующая частоте ω_3 , для пакетов (В,б-а-б) и (В,б-в-б). Плоскость $(x, 4 \cdot w)$.

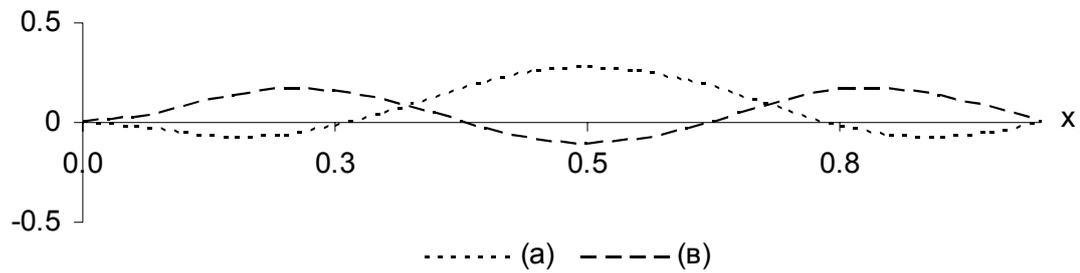


Рис. 2.28. Изгибная осесимметричная форма f_4 , соответствующая частоте ω_4 , для пакетов (В,б-а-б) и (В,б-в-б). Плоскость $(x, 4 \cdot w)$.

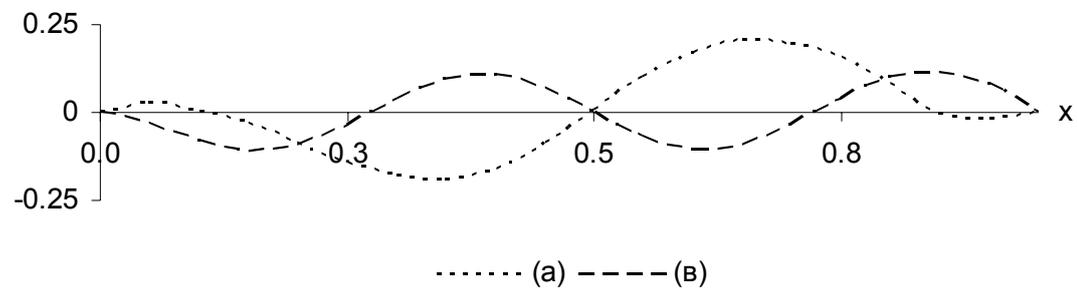


Рис. 2.29. Изгибная осесимметричная форма f_5 , соответствующая частоте ω_5 , для пакетов (В,б-а-б) и (В,б-в-б). Плоскость $(x, 4 \cdot w)$.

Для более полного представления о влиянии интенсивности армирования также рассматривались 5-слойные пакеты типов (2.26А), (2.26В). При коэффициенте волнообразования $n = 8$ варьировалась интенсивность меридионально армированных слоев. Все параметры оболочки остались прежними, включая толщину пакета, при сохранении отношения толщин слоев 1:1:1:1:1. Полученные данные представлены в таблицах 2.12–2.15.

Выводы по пакету типа (В):

1. Погрешность от неучета сдвига при вычислениях всех низших частот сохраняется на уровне $5.2\% \pm .8\%$ (табл. 2.12), однако по сравнению с трехслойным пакетом (табл. 2.9) длина диапазон уменьшилась в 2 раза (с 3% до 1.5%). Как и ранее, наблюдается равномерное распределение погрешности по частотам.

2. Значения частот относительно трехслойного пакета практически не изменились (табл. 2.13).

Таблица 2.12

| Погрешности p_0 – p_5 расчетных значений собственных частот ω_0 – ω_5 , вносимые неучетом сдвиговых деформаций, для 5-слойного пакета типа (В), % | | | | | | | |
|---|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-----------|
| $n = 8$ | p_0 | p_1 | p_2 | p_3 | p_4 | p_5 | max – min |
| (а) | 5.8 | 5.7 | 5.5 | 5.3 | 5 | 4.7 | 1.1 |
| (б) | 5.1 | 4.9 | 4.6 | 4.6 | 4.7 | 5 | 0.5 |
| (в) | 4.5 | 4.4 | 4.4 | 4.5 | 5.2 | 6 | 1.6 |
| (г) | 5 | 5 | 4.8 | 4.6 | 4.6 | 5 | 0.4 |
| min–max | | | | | | | 4.4–6% |

Таблица 2.13

| Отношение $\omega_{k,3}/\omega_{k,5}$, где $\omega_{k,3}$ и $\omega_{k,5}$ – собственные частоты 3 ^х - и 5-слойного пакета типа (В) | | | | | | |
|---|-----------------------------|-----------------------------|-----------------------------|-----------------------------|-----------------------------|-----------------------------|
| $n = 8$ | $\omega_{0,3}/\omega_{0,5}$ | $\omega_{1,3}/\omega_{1,5}$ | $\omega_{2,3}/\omega_{2,5}$ | $\omega_{3,3}/\omega_{3,5}$ | $\omega_{4,3}/\omega_{4,5}$ | $\omega_{5,3}/\omega_{5,5}$ |
| (а) | 1.08 | 1.07 | 1.06 | 1.05 | 1.04 | 1.02 |
| (б) | 1.08 | 1.07 | 1.05 | 1.01 | 0.97 | 0.93 |
| (в) | 1.06 | 1.04 | 1.01 | 0.96 | 0.91 | 0.86 |
| (г) | 1.08 | 1.07 | 1.05 | 1.02 | 0.98 | 0.94 |

Выводы по пакету типа (А):

1. Диапазон получаемой от неучета сдвига погрешности, так же как и в случае (В), уменьшился по сравнению с трехслойным пакетом. Действительно, в трехслойном пакете его длина составляла 19% (табл. 2.8), тогда как в пятислойном – 13% (табл. 2.14). Однако, для вычисленных частот сохранились все выводы, сделанные для трехслойных пакетов. Так, минимальная погрешность наблюдается при меридиональном армировании нечетных слоев по варианту (а) ($\omega_l = 0.1$), а максимальная погрешность, достигающая 15%, при армировании (в) ($\omega_l = 0.9$).

2. Расчетные значения частот ω_2 – ω_5 пяти- и трехслойного пакетов практически совпадают (табл. 2.15). Их отношение сохраняется на уровне 0.95 ± 0.07 . Однако значение частоты ω_0 в результате перехода к 5-слойному пакету увеличилось в 1.5 раза при всех вариантах армирования, за исключением (в).

Таблица 2.14

| Погрешности p_0 – p_5 расчетных значений собственных частот ω_0 – ω_5 , обусловленные неучетом сдвиговых деформаций, для 5-слойного пакета типа (А), % | | | | | | | |
|--|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-----------|
| $n = 8$ | p_0 | p_1 | p_2 | p_3 | p_4 | p_5 | max – min |
| (а) | 2.4 | 2.4 | 2.4 | 2.2 | 2.5 | 2.9 | 0.5 |
| (б) | 2.3 | 2.4 | 3 | 4.6 | 6.7 | 9 | 6.7 |
| (в) | 2.7 | 3.3 | 4.9 | 7.6 | 11 | 15 | 12.3 |
| (г) | 2.2 | 2.3 | 2.8 | 4 | 5.8 | 8.2 | 6 |
| min–max | | | | | | | 2.2–15% |

Таблица 2.15

| Отношение $\omega_{k,3}/\omega_{k,5}$, где $\omega_{k,3}$ и $\omega_{k,5}$ – собственные частоты 3- и 5-слойного пакета типа (А) | | | | | | |
|---|-----------------------------|-----------------------------|-----------------------------|-----------------------------|-----------------------------|-----------------------------|
| $n = 8$ | $\omega_{0,3}/\omega_{0,5}$ | $\omega_{1,3}/\omega_{1,5}$ | $\omega_{2,3}/\omega_{2,5}$ | $\omega_{3,3}/\omega_{3,5}$ | $\omega_{4,3}/\omega_{4,5}$ | $\omega_{5,3}/\omega_{5,5}$ |
| (а) | 0.63 | 0.68 | 0.77 | 0.85 | 0.91 | 0.95 |
| (б) | 0.68 | 0.77 | 0.88 | 0.95 | 1.00 | 1.02 |
| (в) | 0.86 | 0.91 | 0.97 | 1.01 | 1.02 | 1.03 |
| (г) | 0.67 | 0.77 | 0.87 | 0.95 | 0.99 | 1.02 |

В заключение отметим, что формы собственных колебаний пятислой-ного пакета, представленные на рисунках 2.30–2.31, являются изгибными и мало зависят от варьируемого параметра ω_l (они совпадают для всех вариантов за исключением (Γ)).

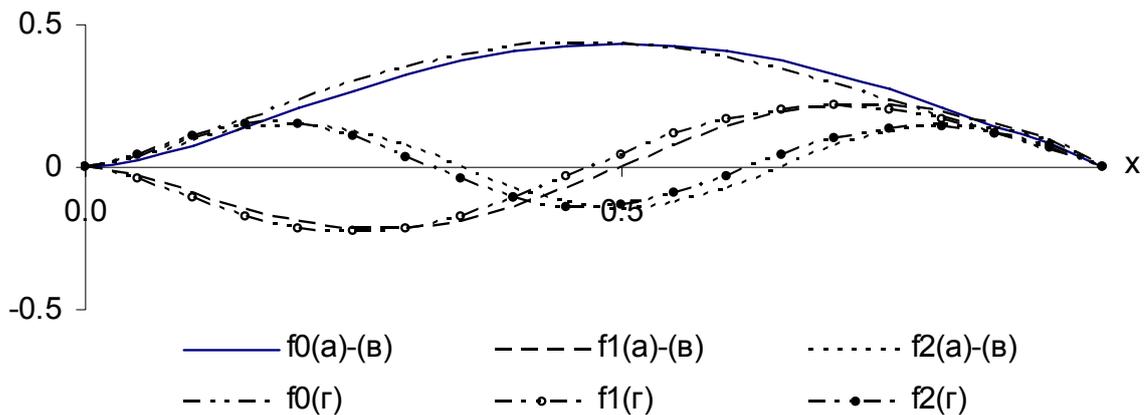


Рис. 2.30. Изгибные формы f_0 – f_2 , соответствующие частотам ω_0 – ω_2 , для 5-слойных пакетов типа (B) с интенсивностью армирования заполнителя (а)–(г) при $n = 8$. Плоскость $(x, 4 \cdot w)$.

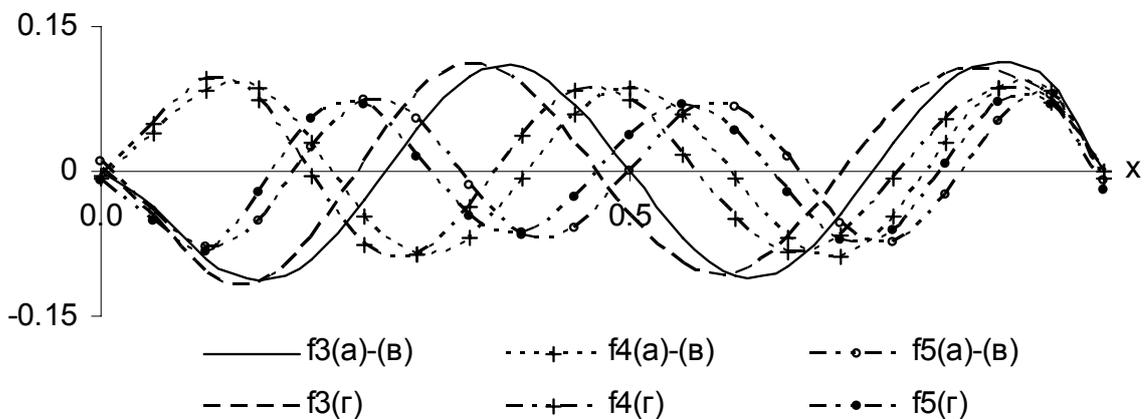


Рис. 2.31. Изгибные формы f_3 – f_5 , соответствующие частотам ω_3 – ω_5 , для 5-слойных пакетов типа (B) с интенсивностью армирования заполнителя (а)–(г) при $n = 8$. Плоскость $(x, 4 \cdot w)$.

В итоге, при перечисленных выше условиях, можно сделать следующий вывод: зависимость степени влияния сдвиговых деформаций от интенсивности меридионального армирования ослабевает по мере увеличения количества слоев.

2.2.5.2. ВАРЬИРОВАНИЕ ОТНОСИТЕЛЬНОЙ ЖЕСТКОСТИ СЛОЕВ ТРЕХСЛОЙНОГО СИММЕТРИЧНОГО ИЗОТРОПНОГО ПАКЕТА

Результаты, завершающие текущую главу, представлены на рисунке 2.32. Исследовалась защемленная трехслойная оболочка симметричного строения, собранная из изотропных слоев одинаковой толщины. Графики представляют погрешность расчета, обусловленную неучетом поперечных сдвиговых деформаций, как функцию параметра E_1/E_2 (E_k – модуль Юнга k слоя). Все параметры оболочки определялись формулами (2.21), (2.23) за исключением $R/h = 30$.

Вывод, сделанный на основе проведенных расчетов, следующий: погрешность при вычислении низших собственных частот, вносимая неучетом сдвига, монотонно растет при увеличении параметра E_1/E_2 , превышая 30% для частот ω_4 и ω_5 при $E_1/E_2 > 100$.

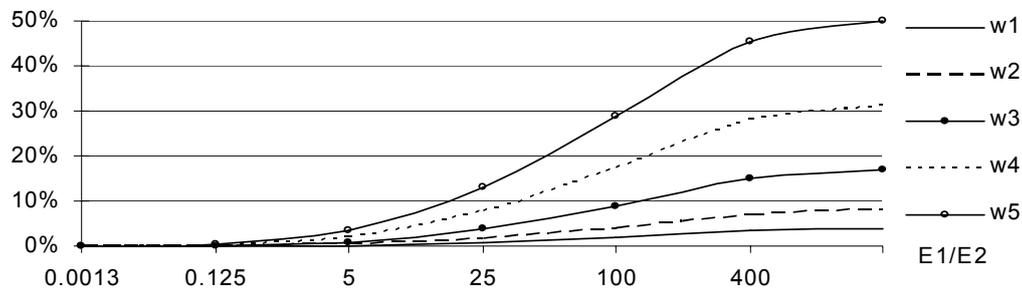


Рис. 2.32. Погрешности $p_1 - p_5$, вносимые неучетом сдвигов, в расчетные значения собственных частот $\omega_1 - \omega_5$ при варьировании параметра E_1/E_2 . Плоскость (E_1/E_2 , p).

Таким образом, получено подтверждение известного факта, ранее отмеченного, например, в работах [13, 14, 67, 247].

ГЛАВА 3. СВОБОДНЫЕ КОЛЕБАНИЯ УСЕЧЕННОЙ МНОГОСЛОЙНОЙ КОНИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ

В этой главе представлено решение задачи о собственных колебаниях упругой слоистой армированной круговой усеченной конической оболочки. Выполнен параметрический анализ расчетных значений собственных частот и соответствующих им форм колебаний, оценено влияние поперечных сдвиговых деформаций.

3.1. ПОСТАНОВКА И РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ

Рассматривается замкнутая круговая усеченная коническая оболочка с углом раствора 2α , толщины h , собранная из m ортотропных армированных

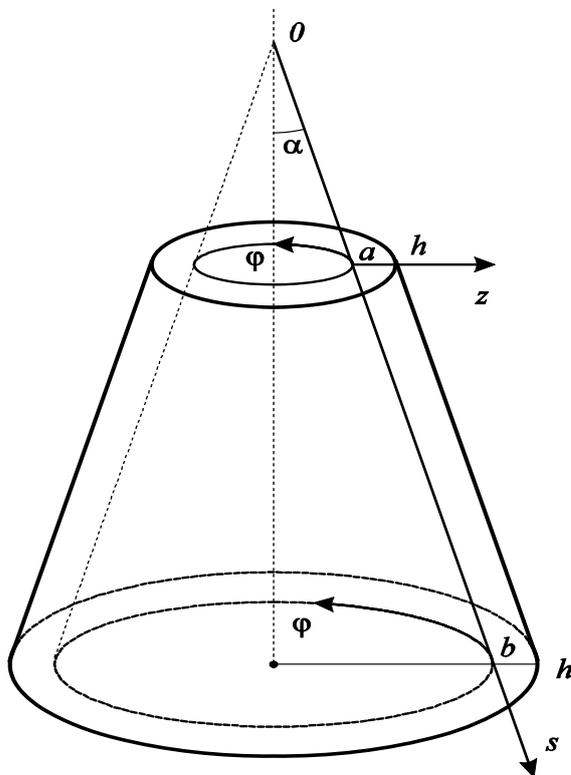


Рис. 3.1. Коническая оболочка и связанная с ее поверхностью координатная система.

упругих слоев постоянной толщины (рис. 3.1). Введена система координат s, φ, z , где $s = x^1$ – расстояние, отсчитываемое от вершины конуса вдоль образующей ($0 < a \leq s \leq b$), $\varphi = x^2$ – угловая координата ($0 \leq \varphi \leq 2\pi$), z – координата, нормальная к поверхности приведения ($0 \leq z \leq h$).

Параметры Ламе A_1, A_2 и радиусы кривизны R_1, R_2 координатных линий гауссовой системы s, φ следующие (см. табл. 1.1):

$$A_1 = 1, A_2 = s \sin \alpha, R_1 = \infty, R_2 = s \operatorname{tg} \alpha \quad (3.1)$$

Система уравнений свободных установившихся гармонических колебаний (1.2.14)–(1.2.20) конической оболочки с учетом (3.1) запишется в следующем виде:

— соотношения напряжения–деформации:

$$\begin{aligned} \sigma_{ss}^{(k)} &= a_{11} \varepsilon_{ss}^{(k)} + a_{12} \varepsilon_{\varphi\varphi}^{(k)}, \quad \sigma_{\varphi\varphi}^{(k)} = a_{12} \varepsilon_{ss}^{(k)} + a_{22} \varepsilon_{\varphi\varphi}^{(k)}, \\ \sigma_{s\varphi}^{(k)} &= \sigma_{\varphi s}^{(k)} = a_{33} \varepsilon_{s\varphi}^{(k)}, \quad \tau_{sz}^{(k)} = G_{13} \gamma_{sz}^{(k)}, \quad \tau_{\varphi z}^{(k)} = G_{23} \gamma_{\varphi z}^{(k)}. \end{aligned} \quad (3.2)$$

— закон распределения физических составляющих вектора перемещения по толщине пакета слоев:

$$\begin{aligned} u_s^{(k)} &= u_s - z \frac{\partial w}{\partial s} + \mu_{11}^{(k)} \pi_s, \\ u_\varphi^{(k)} &= u_\varphi - \frac{z}{s \sin \alpha} \frac{\partial w}{\partial \varphi} + \mu_{22}^{(k)} \pi_\varphi, \quad u_z^{(k)} = w. \end{aligned} \quad (3.3)$$

— соотношения деформации–перемещения:

$$\begin{aligned} \gamma_{sz}^{(k)} &= \frac{f'(z) \pi_s}{G_{13}^{(k)}}, \quad \gamma_{\varphi z}^{(k)} = \frac{f'(z) \pi_\varphi}{G_{23}^{(k)}}, \quad \varepsilon_{zz}^{(k)} = 0, \\ \varepsilon_{ss}^{(k)} &= \frac{\partial u_s}{\partial s} - z \frac{\partial^2 w}{\partial s^2} + \frac{\partial(\mu_{11}^{(k)} \pi_s)}{\partial s}, \quad \varepsilon_{\varphi\varphi}^{(k)} = \frac{1}{s \sin \alpha} \times \\ &\times \left\{ \frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} - \frac{z}{s \sin \alpha} \frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2} + \mu_{22}^{(k)} \frac{\partial \pi_\varphi}{\partial \varphi} + \sin \alpha \left(u_s - z \frac{\partial w}{\partial s} + \mu_{11}^{(k)} \pi_s \right) + w \cos \alpha \right\}, \\ 2\varepsilon_{s\varphi}^{(k)} &= \frac{\partial u_\varphi}{\partial s} - \frac{2z}{s \sin \alpha} \frac{\partial^2 w}{\partial s \partial \varphi} + \frac{z}{s^2 \sin \alpha} \frac{\partial w}{\partial s} + \frac{\partial(\mu_{22}^{(k)} \pi_\varphi)}{\partial s} + \\ &+ \frac{1}{s \sin \alpha} \left\{ \frac{\partial u_s}{\partial \varphi} + \mu_{11}^{(k)} \frac{\partial \pi_s}{\partial \varphi} - \sin \alpha \left(u_\varphi - \frac{z}{s \sin \alpha} \frac{\partial w}{\partial \varphi} \right) + \mu_{22}^{(k)} \pi_\varphi \right\}. \end{aligned} \quad (3.4)$$

— выражение физических составляющих обобщенных усилий и моментов через физические компоненты тензора напряжения в слоях оболочки:

$$[T_{s\varphi}, M_{s\varphi}, S_{s\varphi}, S_{\varphi s}] = \sum_{k=1}^m \int_{h_{k-1}}^{h_k} \sigma_{s\varphi}^{(k)} [1, z, \mu_{22}^{(k)}, \mu_{11}^{(k)}] dz, \quad (3.5)$$

$$[T_{ss}, M_{ss}, S_{ss}] = \sum_{k=1}^m \int_{h_{k-1}}^{h_k} \sigma_{ss}^{(k)} [1, z, \mu_{11}^{(k)}] dz,$$

$$[T_{\varphi\varphi}, M_{\varphi\varphi}, S_{\varphi\varphi}] = \sum_{k=1}^m \int_{h_{k-1}}^{h_k} \sigma_{\varphi\varphi}^{(k)} [1, z, \mu_{22}^{(k)}] dz,$$

$$Q_s = \sum_{k=1}^m \int_{h_{k-1}}^{h_k} \left\{ \sigma_{ss}^{(k)} \frac{\partial \mu_{11}^{(k)}}{\partial s} + \frac{\sigma_{\varphi\varphi}^{(k)}}{s} \mu_{11}^{(k)} \right\} dz + \sum_{k=1}^m \int_{h_{k-1}}^{h_k} \frac{\tau_{sz}^{(k)} f'(z)}{G_{13}^{(k)}} dz - \frac{1}{s} S_{\varphi\varphi},$$

$$Q_\varphi = \sum_{k=1}^m \int_{h_{k-1}}^{h_k} \sigma_{s\varphi}^{(k)} \frac{\partial \mu_{22}^{(k)}}{\partial s} dz + \sum_{k=1}^m \int_{h_{k-1}}^{h_k} \frac{\tau_{\varphi z}^{(k)} f'(z)}{G_{23}^{(k)}} dz + \frac{1}{s} (S_{\varphi s} - S_{s\varphi}).$$

— выражения интегральных характеристик даламберовых сил инерции:

$$[X_s, Y_s, Z_s] = \sum_{k=1}^m \int_{h_{k-1}}^{h_k} \rho^{(k)} \upsilon_s^{(k)} [1, z, \mu_{11}^{(k)}] dz, \quad (3.6)$$

$$[X_\varphi, Y_\varphi, Z_\varphi] = \sum_{k=1}^m \int_{h_{k-1}}^{h_k} \rho^{(k)} \upsilon_\varphi^{(k)} [1, z, \mu_{22}^{(k)}] dz, \quad Y = \dot{w} \sum_{k=1}^m \int_{h_{k-1}}^{h_k} \rho^{(k)} dz.$$

— выражения для компонент тензора $\mu^{(k)}$ (1.2.24);

— дифференциальные уравнения свободных колебаний оболочки:

$$s \sin \alpha \frac{\partial T_{ss}}{\partial s} + \sin \alpha \cdot (T_{ss} - T_{\varphi\varphi}) + \frac{\partial T_{s\varphi}}{\partial \varphi} + \omega^2 s \sin \alpha \cdot X_s = 0, \quad (3.7)$$

$$s \sin \alpha \frac{\partial T_{s\varphi}}{\partial s} + 2 \sin \alpha \cdot T_{s\varphi} + \frac{\partial T_{\varphi\varphi}}{\partial \varphi} + \omega^2 s \sin \alpha \cdot X_\varphi = 0,$$

$$\frac{\partial}{\partial s} \left[s \sin \alpha \frac{\partial M_{ss}}{\partial s} + \sin \alpha \cdot (M_{ss} - M_{\varphi\varphi}) + 2 \frac{\partial M_{s\varphi}}{\partial \varphi} + \omega^2 s \sin \alpha \cdot Y_s \right] +$$

$$\frac{1}{s \sin \alpha} \frac{\partial^2 M_{\varphi\varphi}}{\partial \varphi^2} + \frac{2}{s} \frac{\partial M_{s\varphi}}{\partial \varphi} - \cos \alpha \cdot T_{\varphi\varphi} + \omega^2 \left(s \sin \alpha \cdot I + \frac{\partial Y_\varphi}{\partial \varphi} \right) = 0,$$

$$s \sin \alpha \frac{\partial S_{ss}}{\partial s} + \sin \alpha \cdot (S_{ss} - S_{\varphi\varphi}) + \frac{\partial S_{\varphi s}}{\partial \varphi} - s \sin \alpha \cdot Q_s + \omega^2 s \sin \alpha \cdot Z_s = 0,$$

$$s \sin \alpha \frac{\partial S_{s\varphi}}{\partial s} + \sin \alpha \cdot (S_{s\varphi} + S_{\varphi s}) + \frac{\partial S_{\varphi\varphi}}{\partial \varphi} - s \sin \alpha \cdot Q_\varphi + \omega^2 s \sin \alpha \cdot Z_\varphi = 0.$$

Система (3.2)–(3.7) замыкается однородными краевыми условиями, которые определяются заданием на кривых $s = a$ и $s = b$ кинематических и силовых характеристик, альтернативно выбираемых из пар (1.2.25):

$$(T_{ss}, u_s), (T_{s\varphi}, u_\varphi), \left(M_{ss}, \frac{\partial w}{\partial s} \right), (S_{ss}, \pi_s), (S_{s\varphi}, \pi_\varphi) \quad (3.8)$$

$$\left(\frac{\partial(A_2 M_{ss})}{\partial s} - \sin \alpha \cdot M_{\varphi\varphi} + 2 \frac{\partial M_{s\varphi}}{\partial \varphi} + \omega^2 A_2 Y_s, w \right).$$

Ниже рассматривалась оболочка с жестко защемленными торцами, поэтому условия (3.8) принимают вид

$$w = \partial w / \partial s = u_s = u_\varphi = \pi_s = \pi_\varphi = 0. \quad (3.9)$$

Кроме того, в силу замкнутости контура оболочки, все характеристики напряженно-деформированного состояния должны удовлетворять условиям 2π -периодичности по угловой координате φ .

Таким образом, задача о свободных колебаниях конической оболочки, подобно аналогичной проблеме для цилиндрической оболочки, сформулирована в виде краевой задачи на собственные значения для системы дифференциальных уравнений с частными производными.

Следуя алгоритму, изложенному в § 1.4, представляем полученную систему в матричной форме (1.2.27). Для этого вводим безразмерные переменные по формулам (1.2.26), в которых следует положить $L = b$:

$$x = \frac{s}{b}, \frac{\partial}{\partial s} = \frac{1}{b} \frac{\partial}{\partial x}, \gamma = \frac{h}{R}, \rho_k = \frac{b^2}{E_1^c} \rho_k, \quad (3.10)$$

$$w = h \cdot y_1, y_2 = \frac{\partial y_1}{\partial x}, u_s = b \cdot y_3, u_\varphi = b \cdot y_4, \pi_s = \frac{E_1^c b}{h^3} y_5, u_\varphi = \frac{E_1^c b}{h^3} y_6,$$

$$s \sin \alpha \frac{\partial M_{ss}}{\partial s} + \sin \alpha \cdot (M_{ss} - M_{\varphi\varphi}) + 2 \frac{\partial M_{s\varphi}}{\partial \varphi} + \omega^2 s \sin \alpha \cdot Y_s = h^2 E_1^c y_7,$$

$$x \sin \alpha \cdot M_{ss} = h^2 E_1^c y_8, x \sin \alpha \cdot T_{ss} = h E_1^c y_9, x \sin \alpha \cdot T_{s\varphi} = h E_1^c y_{10},$$

$$x \sin \alpha \cdot S_{ss} = h^4 y_{11}, x \sin \alpha \cdot S_{s\varphi} = h^4 y_{12}.$$

Таким образом, формулируем задачу в виде (1.4.1)–(1.4.3):

$$A(x, D_\varphi) \frac{\partial y}{\partial x} = B(x, D_\varphi) y + \omega^2 C(x, D_\varphi) y, \quad (3.11)$$

$$My(0, \varphi) = O_{6 \times 1}, Ny(1, \varphi) = O_{6 \times 1}, y(x, \varphi) = y(x, \varphi + 2\pi).$$

Здесь A, B, C – матрицы порядка 12×12 ; M, N – матрицы порядка 6×12 . Строение этих матриц при краевых условиях (3.9) следующее:

$$M = N = [E_6, O_6].$$

Приведем ненулевые элементы 12×12 матриц A, B и C , используя обозначения (2.16), (2.17):

$$a_{11} = 1, a_{22} = -\gamma^2 x \sin \alpha \sum_{k=1}^m s_k b_{11}^{(k)} t_{2k}, a_{23} = x \sin \alpha \sum_{k=1}^m s_k b_{11}^{(k)} t_{1k},$$

$$a_{25} = x \sin \alpha \sum_{k=1}^m s_k b_{11}^{(k)} \bar{r}_{11k}, a_{32} = -\gamma^2 a_{23}, a_{33} = x \sin \alpha \sum_{k=1}^m s_k b_{11}^{(k)} t_{0k},$$

$$a_{35} = x \sin \alpha \sum_{k=1}^m s_k b_{11}^{(k)} \bar{r}_{10k}, a_{44} = x \sin \alpha \sum_{k=1}^m s_k b_{33}^{(k)} t_{0k}, a_{46} = x \sin \alpha \sum_{k=1}^m s_k b_{33}^{(k)} \bar{r}_{20k},$$

$$a_{52} = -\gamma^2 a_{25}, a_{53} = a_{35}, a_{52} = -\gamma^2 a_{25}, a_{53} = a_{35}, a_{55} = x \sin \alpha \sum_{k=1}^m s_k b_{11}^{(k)} r_{11k},$$

$$\begin{aligned}
a_{64} = a_{46}, a_{66} &= x \sin \alpha \sum_{k=1}^m s_k b_{33}^{(k)} r_{22k}, a_{72} = \gamma \cos \alpha \sum_{k=1}^m s_k b_{12}^{(k)} \left(t_{1k} - \frac{2\gamma \cdot t_{2k}}{x \sin 2\alpha} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right), \\
a_{73} &= -\frac{\cos \alpha}{\gamma} \sum_{k=1}^m s_k b_{12}^{(k)} \left(t_{0k} - \frac{2\gamma \cdot t_{1k}}{x \sin 2\alpha} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right), a_{74} = \frac{2}{x} \sum_{k=1}^m s_k b_{33}^{(k)} t_{1k} \frac{\partial}{\partial \varphi}, \\
a_{76} &= \frac{2}{x} \sum_{k=1}^m s_k b_{33}^{(k)} \bar{r}_{21k} \frac{\partial}{\partial \varphi}, a_{75} = \frac{1}{x \sin \alpha} \sum_{k=1}^m s_k b_{12}^{(k)} \left(\bar{r}_{11k} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} - \frac{x \sin 2\alpha}{2\gamma} \bar{r}_{10k} \right), \\
a_{77} &= 1, a_{82} = \gamma^2 \sin \alpha \sum_{k=1}^m s_k b_{12}^{(k)} t_{2k}, a_{83} = -\sin \alpha \sum_{k=1}^m s_k b_{12}^{(k)} t_{1k}, a_{84} = x a_{74}, a_{86} = x a_{76}, \\
a_{85} &= -\sin \alpha \sum_{k=1}^m s_k b_{12}^{(k)} \bar{r}_{11k}, a_{88} = 1, a_{92} = -\gamma^2 a_{83}, a_{93} = -\sin \alpha \sum_{k=1}^m s_k b_{12}^{(k)} t_{0k}, \\
a_{95} &= -\sin \alpha \sum_{k=1}^m s_k b_{12}^{(k)} \bar{r}_{10k}, a_{99} = 1, a_{10,2} = \frac{\gamma^2 a_{83}}{\sin \alpha} \frac{\partial}{\partial \varphi}, a_{10,3} = -\frac{a_{93}}{\sin \alpha} \frac{\partial}{\partial \varphi}, \\
a_{10,5} &= -\frac{a_{95}}{\sin \alpha} \frac{\partial}{\partial \varphi}, a_{10,10} = 1, a_{11,3} = -\sin \alpha \sum_{k=1}^m s_k \left(x b_{11}^{(k)} \bar{q}_{10k} + b_{12}^{(k)} \bar{r}_{10k} \right), \\
a_{11,2} &= \gamma^2 \sin \alpha \sum_{k=1}^m s_k \left(x b_{11}^{(k)} \bar{q}_{11k} + b_{12}^{(k)} \bar{r}_{11k} \right), a_{11,4} = \sum_{k=1}^m s_k b_{33}^{(k)} \bar{r}_{10k} \frac{\partial}{\partial \varphi}, a_{11,11} = 1, \\
a_{11,5} &= -\sin \alpha \sum_{k=1}^m s_k \left(x b_{11}^{(k)} q_{11k} + b_{12}^{(k)} r_{11k} \right), a_{11,6} = \sum_{k=1}^m s_k b_{33}^{(k)} r_{21k} \frac{\partial}{\partial \varphi}, a_{12,12} = 1, \\
a_{12,2} &= -\gamma^2 \sum_{k=1}^m s_k b_{12}^{(k)} \bar{r}_{21k} \frac{\partial}{\partial \varphi}, a_{12,3} = \sum_{k=1}^m s_k b_{12}^{(k)} \bar{r}_{20k} \frac{\partial}{\partial \varphi}, a_{12,5} = \sum_{k=1}^m s_k b_{12}^{(k)} r_{12k} \frac{\partial}{\partial \varphi}, \\
a_{12,4} &= -\sin \alpha \sum_{k=1}^m s_k b_{33}^{(k)} \left(x \bar{q}_{20k} - \bar{r}_{20k} \right), a_{12,6} = -\sin \alpha \sum_{k=1}^m s_k b_{33}^{(k)} \left(x q_{22k} - r_{22k} \right). \\
b_{12} &= 1, b_{21} = -a_{72}, b_{22} = a_{82}, b_{23} = a_{83}, b_{24} = \frac{a_{10,2}}{\gamma^2}, b_{25} = -\frac{a_{11,2}}{\gamma^2}, b_{26} = \frac{a_{12,2}}{\gamma^2}, \\
b_{28} &= 1, b_{31} = \gamma^2 a_{73}, b_{32} = -\gamma^2 a_{83}, b_{33} = a_{93}, b_{34} = -a_{10,3}, b_{35} = a_{11,3}, b_{36} = -a_{12,3},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
b_{39} &= 1, b_{41} = -\gamma^2 a_{74}, b_{42} = \gamma^2 a_{84}, b_{43} = -\frac{a_{44}}{x \sin \alpha} \frac{\partial}{\partial \varphi}, b_{44} = \frac{a_{44}}{x}, b_{45} = -a_{11,4}, \\
b_{46} &= a_{12,4}, b_{4,10} = 1, b_{51} = \gamma^2 a_{75}, b_{52} = -\gamma^2 a_{85}, b_{53} = a_{95}, b_{54} = -a_{10,5}, b_{55} = a_{11,5}, \\
b_{56} &= -a_{12,5}, b_{5,11} = 1, b_{61} = -\frac{\gamma^2}{x} a_{86}, b_{62} = \gamma^2 a_{86}, b_{63} = -\frac{a_{46}}{x \sin \alpha} \frac{\partial}{\partial \varphi}, b_{64} = \frac{a_{46}}{x}, \\
b_{65} &= -a_{11,6}, b_{66} = a_{12,6}, b_{6,12} = 1, b_{71} = -\frac{4\gamma^2}{x^3 \sin \alpha} \sum_{k=1}^m s_k b_{33}^{(k)} t_{2k} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + \frac{2\gamma \cos \alpha}{x \sin^2 \alpha} \times \\
&\quad \times \sum_{k=1}^m s_k b_{22}^{(k)} \left(\frac{\sin 2\alpha}{4\gamma} t_{0k} - t_{1k} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + \frac{\gamma}{2x^2 \sin \alpha} t_{2k} \frac{\partial^4}{\partial \varphi^4} \right), \\
b_{72} &= \frac{\gamma^2}{x^2 \sin \alpha} \sum_{k=1}^m s_k (b_{22}^{(k)} + 4b_{33}^{(k)}) \cdot t_{2k} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} - \frac{\gamma \cos \alpha}{x} \sum_{k=1}^m s_k b_{22}^{(k)} t_{1k}, \\
b_{73} &= -\frac{1}{x^2 \sin \alpha} \sum_{k=1}^m s_k t_{1k} (b_{22}^{(k)} + 2b_{33}^{(k)}) \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + \frac{\cos \alpha}{x\gamma} \sum_{k=1}^m s_k b_{33}^{(k)} t_{0k}, \\
b_{74} &= \frac{2}{x^2} \sum_{k=1}^m s_k \left\{ \frac{b_{22}^{(k)}}{2 \sin^2 \alpha} \left(\frac{x \sin 2\alpha}{2\gamma} t_{0k} - t_{1k} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right) + b_{33}^{(k)} t_{1k} \right\} \frac{\partial}{\partial \varphi}, b_{75} = \frac{1}{x^2 \sin \alpha} \times \\
&\quad \times \sum_{k=1}^m s_k \left\{ \frac{x \sin 2\alpha}{2\gamma} (x b_{12}^{(k)} \bar{q}_{10k} + b_{22}^{(k)} \bar{r}_{10k}) - (x b_{12}^{(k)} \bar{q}_{11k} + [b_{22}^{(k)} + 2b_{33}^{(k)}] \cdot \bar{r}_{11k}) \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right\}, \\
b_{76} &= \frac{1}{x^2} \sum_{k=1}^m s_k \left\{ \frac{b_{22}^{(k)}}{\sin^2 \alpha} \left(\frac{x \sin 2\alpha}{2\gamma} \bar{r}_{10k} - \bar{r}_{21k} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right) + 2b_{33}^{(k)} (\bar{r}_{21k} - x \bar{q}_{21k}) \right\} \frac{\partial}{\partial \varphi}, \\
b_{81} &= -b_{72}, b_{82} = -\frac{\gamma^2 \sin \alpha}{x} \sum_{k=1}^m s_k t_{2k} \left\{ b_{22}^{(k)} - \frac{4b_{33}^{(k)}}{\sin^2 \alpha} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right\}, \\
b_{83} &= \frac{\sin \alpha}{x} \sum_{k=1}^m s_k t_{1k} \left(b_{22}^{(k)} - \frac{2}{\sin^2 \alpha} b_{33}^{(k)} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right), b_{84} = \frac{1}{x} \sum_{k=1}^m s_k t_{1k} (b_{22}^{(k)} + 2b_{33}^{(k)}) \frac{\partial}{\partial \varphi}, \\
b_{85} &= \frac{\sin \alpha}{x} \sum_{k=1}^m s_k \left\{ x b_{12}^{(k)} \bar{q}_{11k} + \bar{r}_{11k} \left(b_{22}^{(k)} - \frac{2b_{33}^{(k)}}{\sin^2 \alpha} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right) \right\}, b_{87} = 1,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
b_{86} &= \frac{1}{x} \sum_{k=1}^m s_k \left\{ r_{21k} (b_{22}^{(k)} + 2b_{33}^{(k)}) - 2xb_{33}^{(k)} \bar{q}_{21k} \right\} \frac{\partial}{\partial \varphi}, b_{91} = \frac{\gamma \cos \alpha}{x} \sum_{k=1}^m s_k b_{22}^{(k)} (t_{0k} - \\
&\quad - \frac{2\gamma}{x \sin 2\alpha} t_{1k} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}), b_{92} = -\frac{\gamma^2 \sin \alpha}{x} \sum_{k=1}^m s_k b_{22}^{(k)} t_{1k}, b_{93} = \frac{\sin \alpha}{x} \sum_{k=1}^m s_k b_{22}^{(k)} t_{0k}, \\
b_{94} &= \frac{b_{93}}{\sin \alpha} \frac{\partial}{\partial \varphi}, b_{95} = \sin \alpha \sum_{k=1}^m s_k \left(b_{12}^{(k)} \bar{q}_{10k} + \frac{b_{22}^{(k)}}{x} \bar{r}_{10k} \right), b_{96} = \sum_{k=1}^m s_k \frac{b_{22}^{(k)}}{x} \bar{r}_{20k} \frac{\partial}{\partial \varphi}, \\
b_{9,10} &= -\frac{1}{x \sin \alpha} \frac{\partial}{\partial \varphi}, b_{10,1} = -\frac{\gamma}{x \operatorname{tg} \alpha} \sum_{k=1}^m s_k b_{22}^{(k)} \left(t_{0k} + \frac{2\gamma}{x \sin 2\alpha} t_{1k} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right) \frac{\partial}{\partial \varphi}, \\
b_{10,2} &= \frac{\gamma^2}{x} \sum_{k=1}^m s_k b_{22}^{(k)} t_{1k} \frac{\partial}{\partial \varphi}, b_{10,3} = -b_{94}, b_{10,4} = -\frac{1}{x \sin \alpha} \sum_{k=1}^m s_k b_{22}^{(k)} t_{0k} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}, \\
b_{10,5} &= -\sum_{k=1}^m s_k \left(b_{12}^{(k)} \bar{q}_{10k} + \frac{b_{22}^{(k)}}{x} \bar{r}_{10k} \right) \frac{\partial}{\partial \varphi}, b_{10,6} = -\frac{1}{x \sin \alpha} \sum_{k=1}^m s_k b_{22}^{(k)} \bar{r}_{20k} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}, \\
b_{10,10} &= -\frac{1}{x}, b_{11,1} = -\gamma^2 b_{75}, b_{11,2} = -\gamma^2 b_{85}, b_{11,3} = b_{95} - \frac{a_{11,4}}{x \sin \alpha} \frac{\partial}{\partial \varphi}, \\
b_{11,4} &= \frac{a_{11,4}}{x} - b_{10,5}, b_{11,5} = \frac{9x \sin \alpha}{\gamma^2} \sum_{k=1}^m \frac{t_{4,k} - 2t_{3,k} + t_{2,k}}{s_k d_{11}^{(k)}} + \sin \alpha \sum_{k=1}^m s_k x b_{11}^{(k)} \eta_{1k} + \\
&\quad + \sin \alpha \sum_{k=1}^m s_k \left\{ 2b_{12}^{(k)} q_{11k} + \frac{r_{11k}}{x} \left(b_{22}^{(k)} - \frac{b_{33}^{(k)}}{\sin^2 \alpha} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right) \right\}, b_{12,1} = -\gamma^2 b_{76}, b_{12,2} = \gamma^2 b_{86}, \\
b_{11,6} &= \frac{1}{x} \sum_{k=1}^m s_k \left\{ x b_{12}^{(k)} q_{12k} + b_{22}^{(k)} r_{12k} + b_{33}^{(k)} (r_{21k} - x q_{21k}) \right\} \frac{\partial}{\partial \varphi}, b_{12,4} = \frac{a_{12,4}}{x} + b_{10,6}, \\
b_{12,3} &= -b_{96} - \frac{a_{12,4}}{x \sin \alpha} \frac{\partial}{\partial \varphi}, b_{12,5} = -b_{11,6}, b_{12,6} = \frac{9x \sin \alpha}{\gamma^2} \sum_{k=1}^m \frac{t_{4,k} - 2t_{3,k} + t_{2,k}}{s_k d_{21}^{(k)}} + \\
&\quad + \sin \alpha \sum_{k=1}^m s_k \left\{ b_{33}^{(k)} (x \eta_{2k} - 2q_{22k}) + \frac{r_{22k}}{x} \left(b_{33}^{(k)} - \frac{b_{22}^{(k)}}{\sin^2 \alpha} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right) \right\}.
\end{aligned}$$

Наконец, ненулевые элементы матрицы C :

$$\begin{aligned}
c_{71} &= -x \sin \alpha \sum_{k=1}^m \bar{\rho}_k \left(t_{0k} - \frac{\gamma^2}{x^2 \sin^2 \alpha} t_{2k} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right), c_{74} = -\sum_{k=1}^m \bar{\rho}_k t_{1k} \frac{\partial}{\partial \varphi}, \\
c_{76} &= -\sum_{k=1}^m \bar{\rho}_k \bar{r}_{21k} \frac{\partial}{\partial \varphi}, c_{82} = \gamma^2 x \sin \alpha \sum_{k=1}^m \bar{\rho}_k t_{2k}, c_{83} = -x \sin \alpha \sum_{k=1}^m \bar{\rho}_k t_{1k}, c_{92} = -\gamma^2 c_{83}, \\
c_{85} &= -x \sin \alpha \sum_{k=1}^m \bar{\rho}_k \bar{r}_{11k}, c_{93} = -x \sin \alpha \sum_{k=1}^m \bar{\rho}_k t_{0k}, c_{95} = -x \sin \alpha \sum_{k=1}^m \bar{\rho}_k \bar{r}_{10k}, \\
c_{10,1} &= -\gamma^2 c_{74}, c_{10,4} = c_{93}, c_{10,6} = -x \sin \alpha \sum_{k=1}^m \bar{\rho}_k \bar{r}_{20k}, c_{11,2} = -\gamma^2 c_{85}, c_{11,3} = c_{95}, \\
c_{11,5} &= -x \sin \alpha \sum_{k=1}^m \bar{\rho}_k \bar{r}_{11k}, c_{12,1} = -\gamma^2 c_{76}, c_{12,4} = c_{10,6}, c_{12,6} = -x \sin \alpha \sum_{k=1}^m \bar{\rho}_k \bar{r}_{22k}.
\end{aligned}$$

Отметим, что относительно предельного перехода (1.2.12) в системе (3.11) остается верным все сказанное выше в случае цилиндрических оболочек (глава 2, § 2.1). Таким образом, при вычеркивании из матриц A, B, C строк и столбцов с номерами 5, 6, 11, 12, формируются матрицы коэффициентов классической системы уравнений свободных колебаний усеченной конической оболочки, имеющие 8-ой порядок.

Решение задачи (3.11) проводим по схеме, изложенной в § 1.4 и реализованной во второй главе. Следует учесть, что при переходе к системе обыкновенных дифференциальных уравнений (1.4.5) множества I, R тех номеров компонент искомого вектора, относительно которых сохраняется четность оператора дифференцирования по угловой переменной, определяется (2.18). При аппроксимации (1.4.11) вектора y система базисных функций в методе Бубнова-Галеркина построена на основе ортогональных на $[-1, 1]$ полиномов Лежандра $P_k(x)$ и определена в следующем виде:

$$v_{kj}(x) = \sqrt{\frac{2k-1}{1-a/b}} P_{k-1} \left(2 \frac{x-a/b}{1-a/b} - 1 \right) \cdot e_j, \quad (3.12)$$

где $x \in [a/b, 1]$; $k = 1, \dots, N$; $j \in J$; векторы e_j составляют канонический базис в пространстве R^{12} ; множество $J = \{1, \dots, 6\}$ ненулевых столбцов матрицы C определяется (2.20).

Из структуры множества J следует, что координатная система (3.12) в (1.4.11) состоит из $6N$ векторов и приводит к краевой задаче (1.4.15) относительно $12 \times 6N$ матрицы $Z(x)$. Следовательно, в силу (1.4.12)–(1.4.14) необходимо решать алгебраическую проблему собственных значений для матрицы размера $6N \times 6N$. Значение параметра N , обеспечивающее достаточную точность результата, как и прежде, устанавливалось в результате численного исследования сходимости метода.

3.2. ПАРАМЕТРИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ СОБСТВЕННЫХ ЧАСТОТ И СОБСТВЕННЫХ ФОРМ КОЛЕБАНИЙ УСЕЧЕННОЙ КОНИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ

В этом параграфе представлены результаты численного исследования значений первых шести собственных частот и соответствующих им колебаний усеченной конической оболочки при различных физических, геометрических и структурных параметрах. Установлены некоторые области значений параметров, в которых влияние поперечного сдвига наиболее значимо. Проведен сравнительный анализ низших собственных частот и соответствующих им собственных форм конической и цилиндрической оболочек с «родственными» физико-геометрическими характеристиками.

3.2.1. СКОРОСТЬ СХОДИМОСТИ ЧИСЛЕННОГО РАСЧЕТА СОБСТВЕННЫХ ЧАСТОТ ОТНОСИТЕЛЬНО ЧИСЛА АППРОКСИМИРУЮЩИХ ФУНКЦИЙ

На рисунках 3.2, 3.3 представлены значения шести низших собственных частот ω_0 – ω_5 как функции параметра N , которые позволяют судить о

скорость сходимости метода относительно количества используемых при аппроксимации (1.4.11) базисных функций.

Результаты получены для трехслойной композитной усеченной конической оболочки симметричного относительно срединной поверхности строения при условиях жесткого защемления (3.9). Первый и третий слои армированы в меридиональном направлении, а второй – в окружном. Приняты следующие параметры оболочки ($k = 1, 2, 3$ – номер слоя):

— геометрические

$$\alpha = \pi/10, b = 10\text{м}, a/b = 0.3, b/h = 50, h_k - h_{k-1} = h/3 \quad (3.13)$$

— механические

$$E_k^c = 3000\text{МПа}, E_k^a = 250\text{ГПа}, \nu_k^c = \nu_k^a = 0.3, \quad (3.14)$$

$$\rho_k^c = 1250\text{кг/м}^3, \rho_k^a = 1710\text{кг/м}^3$$

— структурные ($r = 1, 3$)

$$\omega_{l,1}|_{x=a/b} = \omega_{l,3}|_{x=a/b} = 0.9, \omega_{l,r} = (a/bx)\omega_{l,r}|_{x=a/b}, \omega_{l,2} = \omega_{zk} = 0.5. \quad (3.15)$$

Предполагалось армирование волокнами постоянного сечения, поэтому интенсивность меридионального армирования переменна. Соответствующая величина $\omega_{l,r}$ определялась формулой (1.1.6), в которой следует положить $L_0 = 2\pi a \cdot \sin\alpha$, $L^* = 2\pi bx \cdot \sin\alpha$, $\omega_{0,k} = \omega_{l,k}|_{x=a/b}$.

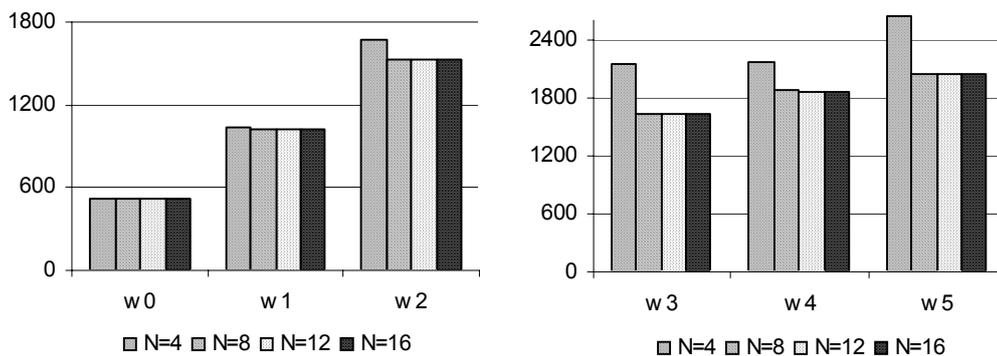


Рис. 3.2. Зависимость значений низших частот ω_0 – ω_5 осесимметричных колебаний от параметра N , Гц.

Из рисунка 3.2 при $n = 0$ и рисунка 3.3 при $n = 2$ следует, что приближение к точным значениям собственных частот происходит сверху, при этом стабилизация вычисления частот ω_0 – ω_3 достигается при $N = 8$, а ω_4, ω_5 – при $N = 12$.

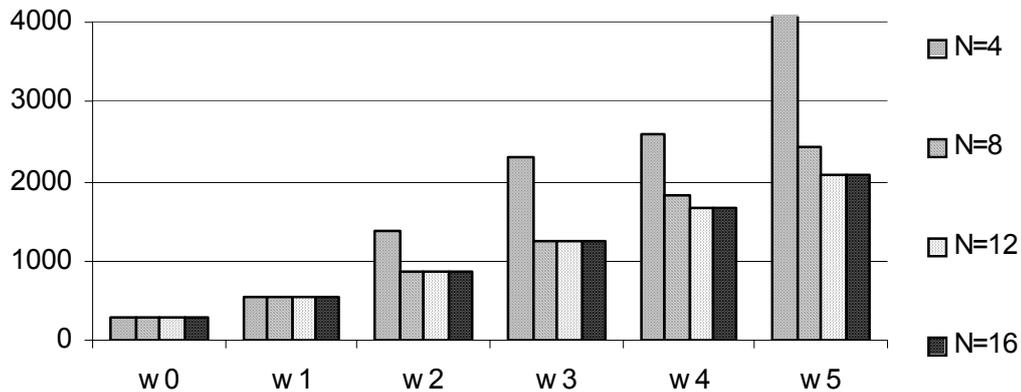


Рис. 3.3. Зависимость значений низших частот ω_0 – ω_5 от параметра N при $n = 2$, Гц.

Проведенные расчеты показали, что описанная ситуация типична как относительно коэффициента волнообразования n , так и относительно геометрических, физических и структурных параметров оболочки. Это позволило во всех дальнейших расчетах принять $N = 12$. Отметим, что полученное значение параметра N совпадает со значением аналогичного параметра для цилиндрической оболочки (глава 2, § 2.2.1 и [289, 290]), а также с данными, ранее полученными для конических оболочек другими авторами и приведенными в [30].

3.2.2. ОСЕСИММЕТРИЧНЫЕ ФОРМЫ СОБСТВЕННЫХ КОЛЕБАНИЙ ЖЕСТКО ЗАЦЕМЛЕННОЙ ОБОЛОЧКИ

На рисунках 3.4, 3.5 представлены осесимметричные формы собственных колебаний оболочки с параметрами (3.13)–(3.15). Из этих результатов следует, что формы, соответствующие частотам ω_0, ω_1 являются изгибными (рис. 3.4), а частотам ω_2 – ω_5 – крутильными (рис. 3.5).

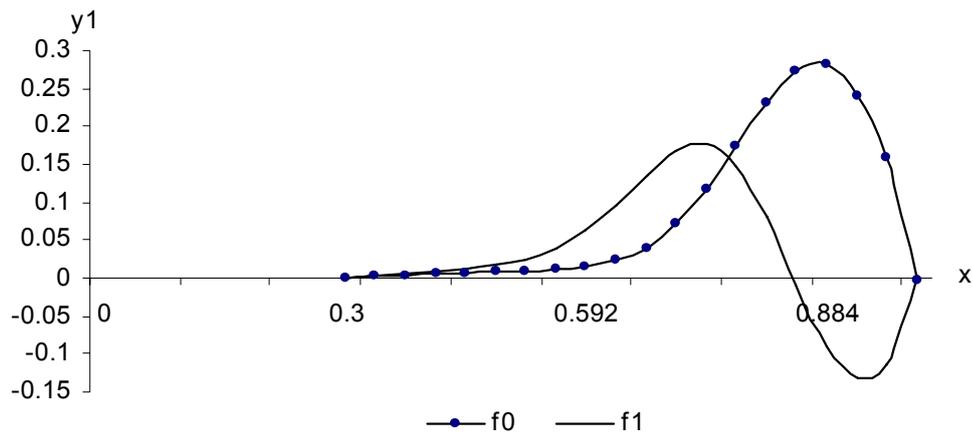


Рис. 3.4. Изгибные формы f_0, f_1 осесимметричных колебаний, соответствующие частотам ω_0, ω_1 , жестко заземленной усеченной конической оболочки (3.13)–(3.15).

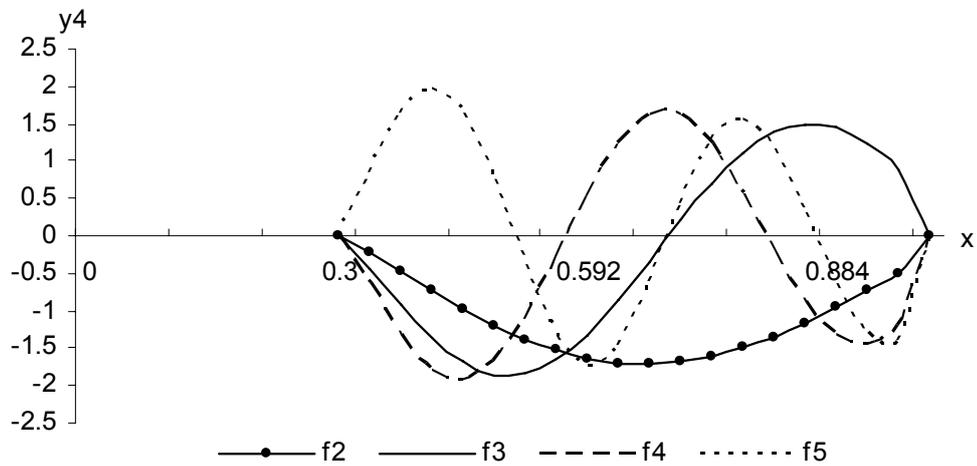


Рис. 3.5. Крутильные формы f_2 – f_5 осесимметричных колебаний, соответствующие частотам ω_2 – ω_5 , жестко заземленной усеченной конической оболочки (3.13)–(3.15).

Представленные формы согласуются с осесимметричными формами двухслойной усеченной конической оболочки, приведенными в [30, глава 8, § 8.4, с. 224].

3.2.3. ЗАВИСИМОСТЬ СОБСТВЕННЫХ ЧАСТОТ И СТЕПЕНИ ВЛИЯНИЯ НА НИХ ПОПЕРЕЧНЫХ СДВИГОВЫХ ДЕФОРМАЦИЙ ОТ ПАРАМЕТРА ВОЛНООБРАЗОВАНИЯ

Результаты исследования собственных частот ω_0 – ω_5 усеченной конической оболочки от параметра n представлены на рисунках 3.6, 3.7 и в таблице 3.1. Расчеты проведены для оболочки, характеристики которой определялись (3.13)–(3.15). На их основе расчетов отмечено следующее:

1. Все низшие частоты, рассматриваемые как функции параметра n , имеют минимумы (рис. 3.6), на наличие которых указывалось во многих статьях и монографиях, в частности [30, 38, 67, 287, 289, 290, 384], а также в данной работе во второй главе при изучении цилиндрической оболочки.

2. Учет сдвиговых деформаций при расчете собственных частот может изменить положение точки минимума относительно n . Действительно, минимумы частот ω_4 , ω_5 , полученные с учетом и без учета сдвиговых деформаций, достигаются при разных параметрах волнообразования (рис. 3.6, 3.7, табл. 3.1).

Таблица 3.1

| Минимумы функций $\omega_k = \omega_k(n)$, полученные для жестко заземленной оболочки (3.13)–(3.15) | | |
|---|-------------------------|-------------------------|
| теория \ ω_k | ω_0 – ω_3 | ω_4 – ω_5 |
| модель Андреева-Немировского | $n = 2$ | $n = 4$ |
| классическая модель | $n = 2$ | $n = 0$ |

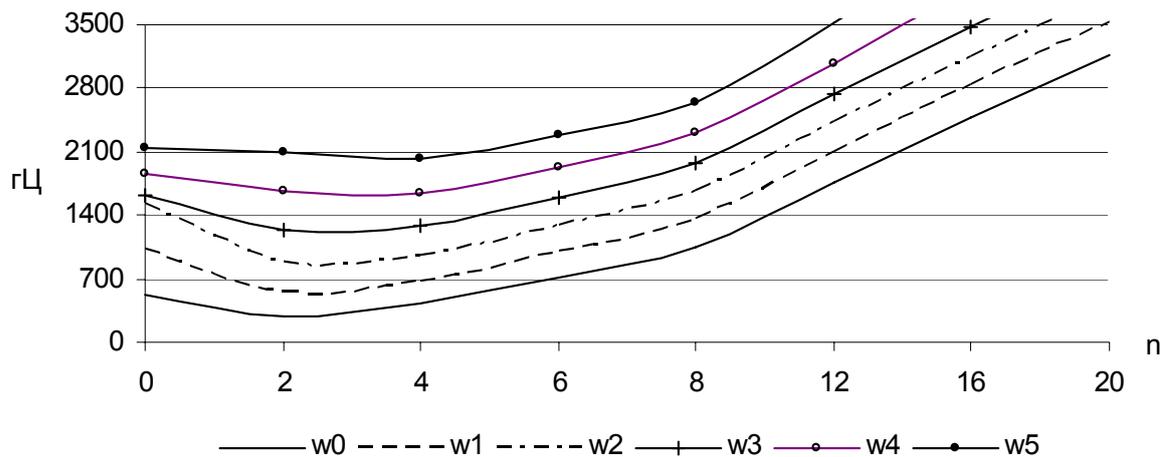


Рис. 3.6. Зависимость от параметра n собственных частот $\omega_0-\omega_5$, вычисленных с учетом сдвиговых деформаций по теории Андреева-Немировского.

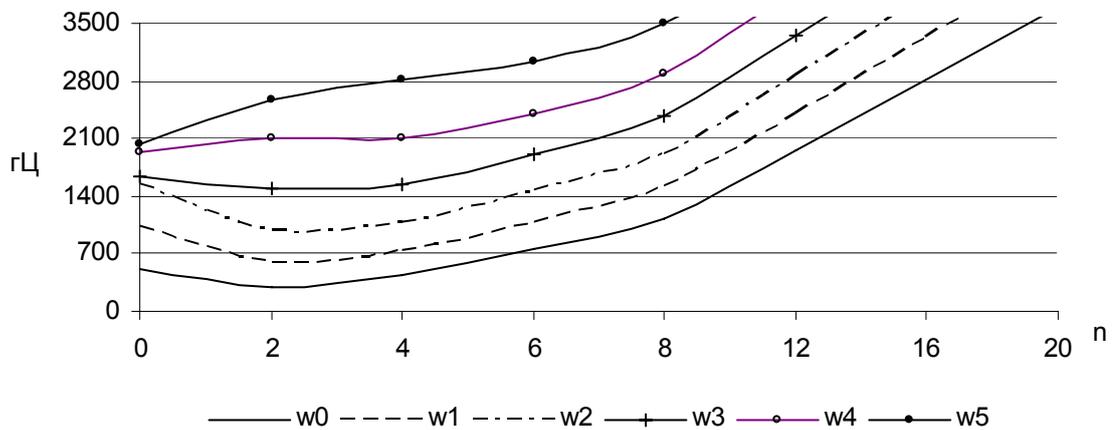


Рис. 3.7. Зависимость от параметра n частот $\omega_0-\omega_5$, вычисленных без учета поперечного сдвига.

На рисунке 3.8 и в таблице 3.2 отражены результаты исследования влияния деформаций сдвига на расчетные значения собственных частот $\omega_0-\omega_5$ в зависимости от параметра n . Изучались погрешности p_0-p_5 расчетных значений частот, обусловленные неучетом сдвиговых деформаций. Сделаны следующие выводы:

Во-первых, неучет поперечных деформаций приводит к завышению расчетных значений собственных частот, которое увеличивается с ростом номера n . Так, если при $n=0$ погрешность составляла не более 3%, то при $n=2$ она увеличилась до 20% (для ω_4, ω_5), а при $n=4$ превысила 30%. Ана-

логичная тенденция была отмечена во второй главе (§ 2.2.3) при изучении цилиндрической оболочки.

Во-вторых, из таблицы 3.2 видим, что наибольший скачок всех рассматриваемых погрешностей в результате изменения параметра n зафиксирован при переходе от $n=0$ к $n=2$. При этом его значение существенно зависит от номера соответствующей частоты. Так, величина скачка для частоты ω_0 составила 17% длины диапазона погрешности, для частоты ω_1 – около 30%, для частот ω_2 – ω_5 – от 50% до 85%. Заметим также, что при вычислении частот ω_0, ω_1 влияние поперечных деформаций с ростом параметра n возрастает «умеренно» (почти линейно).

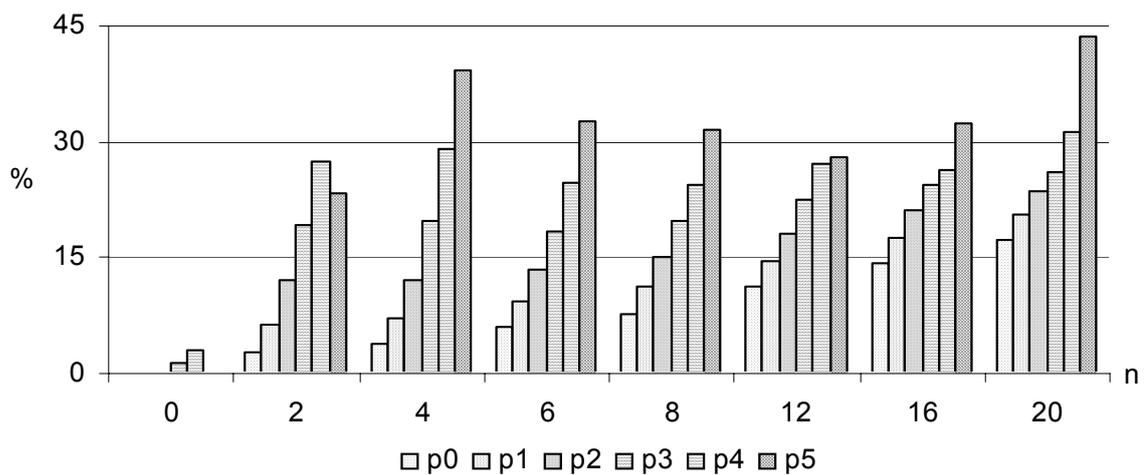


Рис. 3.8. Погрешности p_0 – p_5 , вносимые в расчетные значения частот ω_0 – ω_5 неучетом сдвига, как функции параметра n .

Таблица 3.2

| Погрешности p_0 – p_5 , вносимые в расчетные значения частот ω_0 – ω_5 неучетом сдвига, как функции параметра n , % | | | | | | |
|---|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| $n \setminus p_k$ | p_0 | p_1 | p_2 | p_3 | p_4 | p_5 |
| 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 3 | 0 |
| 2 | 3 | 6 | 12 | 19 | 27 | 23 |
| 4 | 4 | 7 | 12 | 20 | 29 | 39 |
| 6 | 6 | 9 | 14 | 18 | 25 | 33 |
| 8 | 8 | 11 | 15 | 20 | 24 | 32 |
| 16 | 14 | 17 | 21 | 25 | 26 | 32 |
| 20 | 17 | 20 | 24 | 26 | 31 | 44 |

Таким образом, в очередной раз подтверждается тот факт, что учет сдвиговых деформаций в случае малых n более существенен при расчете собственных частот с большими номерами [38, 67, 247, 287, 289 и другие].

3.2.4. ЗАВИСИМОСТЬ СОБСТВЕННЫХ ЧАСТОТ И СТЕПЕНИ ВЛИЯНИЯ НА НИХ ДЕФОРМАЦИЙ СДВИГА ОТ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИК

3.2.4.1. ВАРЬИРОВАНИЕ ОТНОСИТЕЛЬНОЙ ТОЛЩИНЫ ОБОЛОЧКИ

Проведено исследование зависимости значений низших собственных частот $\omega_0, \dots, \omega_5$ от параметра b/h . Полученные результаты отражены на рисунках 3.9, 3.10 и в таблице 3.3.

Рассматривалась жестко защемленная коническая оболочка, параметры которой определены формулами (3.13)–(3.15), число окружных волн $n = 2$ (рис. 3.9, табл. 3.2) и $n = 4$ (рис. 3.10).

Таблица 3.3

| Зависимость расчетных значений частот жестко защемленной оболочки (3.13)–(3.15) от параметра b/h , Гц | | | | | | | | | | | | | | | |
|---|------------------------------|------------|------------|------------|------------|--|------------|------------|------------|------------|----------------------------------|-------|-------|-------|-------|
| $n=2$ | теория Андреева–Немировского | | | | | теория Кирхгофа–Лява | | | | | погрешность от неучета сдвига, % | | | | |
| b/h | ω_0 | ω_1 | ω_2 | ω_3 | ω_4 | ω_0 | ω_1 | ω_2 | ω_3 | ω_4 | p_0 | p_1 | p_2 | p_3 | p_4 |
| 40 | 298 | 588 | 937 | 1329 | 1751 | 310 | 649 | 1117 | 1718 | 2445 | 4 | 10 | 19 | 29 | 40 |
| 50 | 277 | 549 | 878 | 1249 | 1656 | 284 | 585 | 984 | 1490 | 2109 | 3 | 6 | 12 | 19 | 27 |
| 60 | 263 | 522 | 830 | 1179 | 1566 | 268 | 544 | 897 | 1335 | 1870 | 2 | 4 | 8 | 13 | 19 |
| 70 | 254 | 502 | 793 | 1121 | 1484 | 257 | 517 | 837 | 1225 | 1695 | 1 | 3 | 6 | 9 | 14 |
| 80 | 247 | 487 | 764 | 1073 | 1417 | 250 | 498 | 794 | 1145 | 1565 | 1 | 2 | 4 | 7 | 10 |
| 100 | 239 | 467 | 723 | 1001 | 1308 | 240 | 473 | 739 | 1039 | 1388 | 1 | 1 | 2 | 4 | 6 |
| 120 | 233 | 455 | 697 | 953 | 1231 | 235 | 459 | 707 | 975 | 1277 | 1 | 1 | 1 | 2 | 4 |
| 200 | 225 | 435 | 652 | 865 | 1079 | 226 | 436 | 654 | 870 | 1089 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 |
| 500 | 220 | 423 | 626 | 811 | 978 | 220 | 423 | 626 | 811 | 979 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| $\Delta\omega_k$ | 78 | 165 | 311 | 518 | 773 | – абсолютное изменение частот | | | | | | | | | |
| $\Delta_k \downarrow, \%$ | 26 | 28 | 33 | 39 | 44 | – изменение частот, рассчитанное относительно их максимального значения, соответствующего $b/h = 40$ | | | | | | | | | |

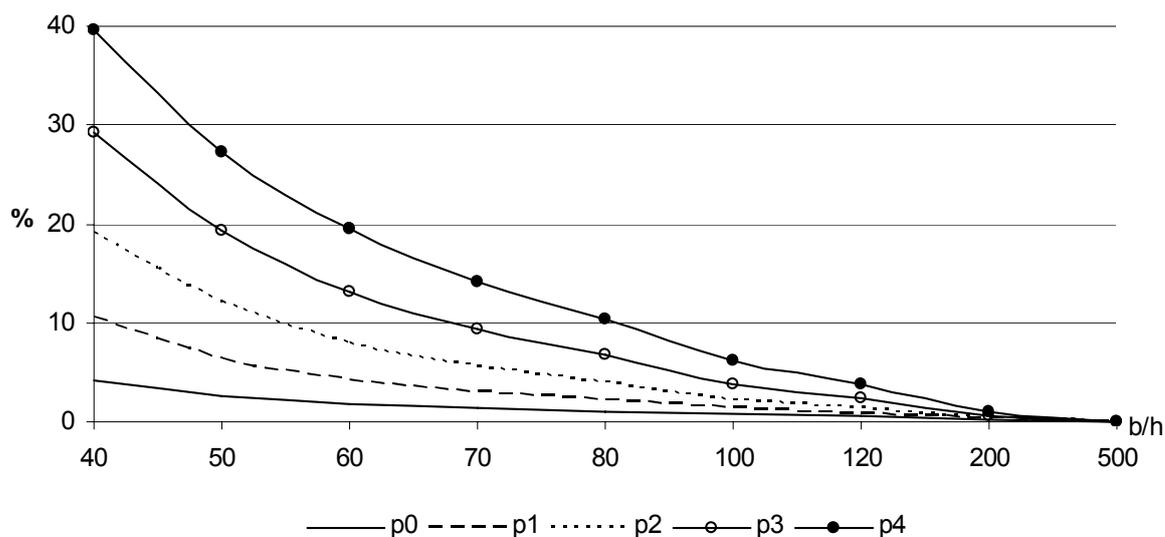


Рис. 3.9. Погрешности p_0 – p_4 , вносимые неучетом сдвига при вычислении частот ω_0 – ω_4 , как функции параметра b/h . Коэффициент волнообразования $n = 2$.

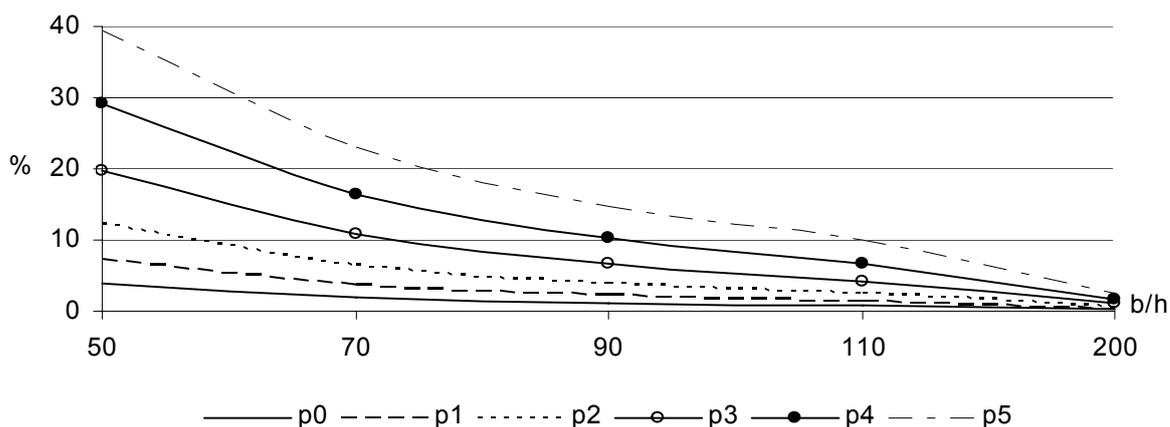


Рис. 3.10. Погрешности p_0 – p_5 , вносимые неучетом сдвига при вычислении частот ω_0 – ω_5 , как функции параметра b/h . Коэффициент волнообразования $n = 4$.

Анализ полученных данных позволяет сделать следующие выводы:

1. Значения всех частот ω_0 – ω_5 уменьшается при увеличении параметра b/h (табл. 3.3). Следовательно, чем «тоньше» оболочка, тем меньше частота ее колебаний.

2. Значение погрешности, вносимой в расчетные значения частот при неучете сдвига, убывает по мере увеличения параметра b/h (рис. 3.9 и табл. 3.3). Следовательно, влияние сдвиговых деформаций на низшие собствен-

ные частоты ослабевают по мере уменьшения относительной толщины оболочки.

Заметим, во-первых, что аналогичная зависимость от параметра R/h наблюдалась для цилиндрической оболочки (глава 2, § 2.2.4). Во-вторых, те же тенденции были выявлены другими авторами в перечисленных ранее работах.

Таким образом, существенное влияние сдвиговых деформаций отмечается для оболочек с относительными толщинами $b/h < 50$ ($a/h < 15$), поскольку погрешность при определении старших частот ω_4, ω_5 достигает 40%. При значениях параметра $b/h > 80$ ($a/h > 24$) погрешность не превышает 10%, а для $b/h > 100$ ($a/h > 30$) она составляет менее 6%.

Аналогичная картина наблюдается и при больших параметрах волнообразования n , что подтверждается данными, полученными при $n = 4$ и представленными на рисунке 3.10.

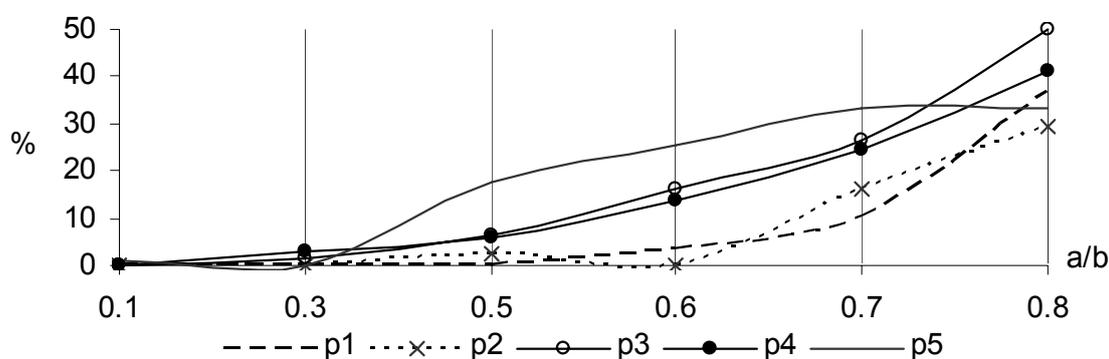
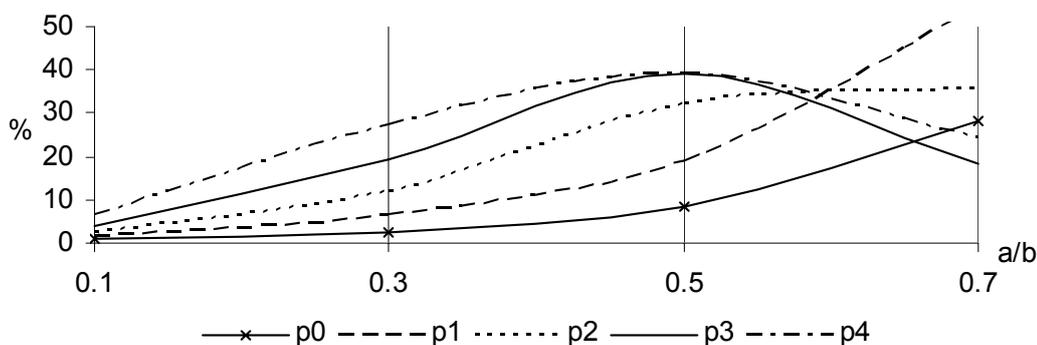
3.2.4.2. ВАРЬИРОВАНИЕ ОТНОСИТЕЛЬНОЙ ДЛИНЫ ОБЛОЧКИ

Результаты исследования зависимости от параметра a/b значений собственных частот и значимости учета поперечного сдвига представлены в таблице 3.4 и на рисунках 3.11, 3.12. Рассматривалась жестко заземленная оболочка (3.13)–(3.15). Расчеты проводились при $n = 0$ (рис. 3.11) и $n = 2$ (рис. 3.12).

Общая тенденция, отмеченная в поведении значений частот и значений погрешности, вносимой неучетом поперечных деформаций: с ростом параметра a/b , т. е. по мере уменьшения относительной длины, значения частот, как и значения погрешностей увеличиваются.

Таблица 3.4

| Зависимость собственных частот оболочки (3.13)–(3.15) от параметра a/b , Гц | | | | | | | | | | | | | | |
|---|------------------------------|------------|------------|------------|----------------------|------------|------------|------------|----------------------------------|-------|-------|-------|-------|-------|
| $n=0$ | теория Андреева–Немировского | | | | теория Кирхгофа–Лява | | | | погрешность от неучета сдвига, % | | | | | |
| a/b | ω_0 | ω_1 | ω_2 | ω_3 | ω_0 | ω_1 | ω_2 | ω_3 | p_0 | p_1 | p_2 | p_3 | p_4 | p_5 |
| 0.1 | 410 | 769 | 1133 | 1182 | 410 | 769 | 1133 | 1182 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| 0.3 | 525 | 1026 | 1531 | 1622 | 525 | 1026 | 1531 | 1645 | 0 | 0 | 0 | 1 | 3 | 3 |
| 0.5 | 776 | 1538 | 1668 | 1977 | 776 | 1538 | 1710 | 2105 | 0 | 0 | 3 | 6 | 6 | 18 |
| 0.6 | 1011 | 1697 | 2007 | 2079 | 1011 | 1755 | 2007 | 2420 | 0 | 3 | 0 | 16 | 14 | 25 |
| 0.7 | 1417 | 1777 | 2421 | 2817 | 1417 | 1960 | 2817 | 3557 | 0 | 10 | 16 | 26 | 25 | 33 |
| 0.8 | 2122 | 2263 | 3479 | 4503 | 2263 | 3091 | 4503 | 6746 | 7 | 37 | 29 | 50 | 41 | 33 |

Рис. 3.11. Погрешности p_0 – p_5 , вносимые неучетом сдвига в расчетные значения частот ω_0 – ω_5 , как функции параметра a/b . Коэффициент волнообразования $n = 0$.Рис. 3.12. Погрешности p_0 – p_5 , вносимые неучетом сдвига в расчетные значения частот ω_0 – ω_5 , как функции параметра a/b . Коэффициент волнообразования $n = 2$.

Полученные данные во-первых, не противоречат общепризнанным (например см. [30, 67, 247]) тенденциям поведения частот и оценки значимости сдвиговых деформаций. Во-вторых, подтверждают выводы, сделанные при исследовании цилиндрических оболочек: учет поперечных сдви-

говых деформаций наиболее значим для относительно коротких оболочек. Например, для области значений параметра $a/b > 0.6$ погрешность классической модели составляет более 30%.

3.2.5. ЗАВИСИМОСТЬ СОБСТВЕННЫХ ЧАСТОТ И СТЕПЕНИ ВЛИЯНИЯ НА НИХ ДЕФОРМАЦИЙ ПОПЕРЕЧНОГО СДВИГА ОТ УГЛА РАСТВОРА КОНУСА

Результаты варьирования угла раствора конуса α (рис. 3.1) представлены в таблице 3.5 и на рисунке 3.13. Рассматривалась оболочка с характеристиками (3.13)–(3.15), число окружных волн $n = 2$. Угол конусности изменялся в диапазоне от $\pi/30$ до $\pi/3$. Изучались значения собственных частот ω_0 – ω_5 , а также погрешность этих значений, возникающая при неучете сдвиговых деформаций.

На основе таблицы 3.5 сделан вывод о том, что увеличение угла раствора конуса влечет за собой уменьшение расчетных значений всех частот.

Таблица 3.5

| Зависимость низших собственных частот усеченной конической оболочки от угла раствора конуса, Гц | | | | | | | | | | | | |
|---|------------------------------|------------|------------|------------|------------|------------|---|------------|------------|------------|------------|------------|
| α | модель Андреева–Немировского | | | | | | модель Кирхгофа–Лява | | | | | |
| | ω_0 | ω_1 | ω_2 | ω_3 | ω_4 | ω_5 | ω_0 | ω_1 | ω_2 | ω_3 | ω_4 | ω_5 |
| $\pi/30$ | 643 | 916 | 1202 | 1494 | 1797 | 2126 | 676 | 987 | 1334 | 1724 | 2177 | 2736 |
| $\pi/20$ | 425 | 682 | 973 | 1294 | 1647 | 2025 | 439 | 720 | 1068 | 1503 | 2040 | 2688 |
| $\pi/10$ | 277 | 549 | 878 | 1249 | 1656 | 2091 | 284 | 585 | 984 | 1490 | 2109 | 2578 |
| $\pi/5$ | 241 | 512 | 842 | 1226 | 1652 | 2073 | 248 | 550 | 964 | 1505 | 2069 | 2181 |
| $\pi/4$ | 225 | 488 | 817 | 1203 | 1634 | 1768 | 232 | 529 | 947 | 1499 | 1767 | 2116 |
| $\pi/3$ | 195 | 447 | 778 | 1171 | 1470 | 1610 | 203 | 493 | 920 | 1468 | 1491 | 1859 |
| $\downarrow, \%$ | 70 | 51 | 35 | 22 | 18 | 24 | – изменение частот ω_k относительно $\omega_{k, \max}$ | | | | | |
| Погрешность p_0 – p_5 , вносимая неучетом сдвигов в расчетные значения частот ω_0 – ω_5 , % | | | | | | | | | | | | |
| α | p_0 | p_1 | p_2 | p_3 | p_4 | p_5 | | | | | | |
| $\pi/30$ | 5 | 8 | 11 | 15 | 21 | 29 | | | | | | |
| $\pi/20$ | 3 | 6 | 10 | 16 | 24 | 33 | | | | | | |
| $\pi/10$ | 3 | 6 | 12 | 19 | 27 | 23 | | | | | | |
| $\pi/5$ | 3 | 8 | 14 | 23 | 25 | 5 | | | | | | |
| $\pi/4$ | 3 | 8 | 16 | 25 | 8 | 20 | | | | | | |
| $\pi/3$ | 4 | 10 | 18 | 25 | 1 | 15 | | | | | | |

При анализе значений полученных погрешностей (табл. 3.5, рис. 3.13) произошло их естественное разбиение на группы, соответствующие частотам $\{\omega_0, \omega_1\}$, $\{\omega_2, \omega_3\}$, $\{\omega_4\}$ и $\{\omega_5\}$. Выводы, сделанные при изучении каждой группы, следующие:

1. При вычислении частот ω_0, ω_1 степень влияния сдвига мало зависит от угла конусности. Наблюдается стабильный уровень погрешностей около $4\% \pm 1\%$ и $8\% \pm 2\%$ соответственно; причем максимумы значений достигаются на границе рассматриваемого диапазона (при углах $\pi/30$ и $\pi/3$). Можно говорить о равномерном распределении погрешности относительно угла конусности α .

2. При вычислении частот ω_2, ω_3 наблюдается почти равномерное относительно α усиление влияния сдвигов. По мере увеличения угла конусности погрешность монотонно растет с 11% до 18% и 15% до 25% соответственно; причем это «умеренный рост без существенных скачков». Действительно, увеличение угла раствора в среднем в 1.5 раза приводит к росту погрешности около 2% . Можно говорить о линейном распределении погрешности относительно α .

3. При вычислении частоты ω_4 степень влияния сдвига стабильно высока в диапазоне $\alpha \leq \pi/5$. В диапазоне углов $[\pi/30, \pi/5]$ значение погрешности сохраняется на уровне $24\% \pm 3\%$. Однако увеличение угла приводит к снижению значения погрешности до 8% . Таким образом, можно констатировать, что в интервале $(\pi/5, \pi/4)$ найдется угол конусности, при достижении которого влияние сдвига на ω_4 существенно ослабевает.

4. При вычислении частоты ω_5 влиянием сдвига пренебрегать нельзя при любом значении угла α . Несмотря на то, что значение погрешности по мере увеличения угла конусности убывает, зависимость от этого параметра нестабильна. Так, при углах, принадлежащих интервалам $[\pi/30, \pi/10]$ и

$[\pi/4, \pi/3]$, значение погрешности на уровне $29\% \pm 5\%$ и $20\% \pm 5\%$ соответственно. Однако при среднем значении угла из изучаемого промежутка, т. е. $\pi/5$, наблюдается практически полное соответствие частот, вычисленных как с учетом, так и без учета сдвига. Как следствие, значение погрешности «рухнуло» до отметки 5%.

Резюмируем сказанное выше:

- 1) при вычислении ω_0, ω_1 учет сдвигов наиболее значим для конических оболочек с углом раствора либо $\alpha < \pi/30$, либо $\alpha > \pi/3$;
- 2) при вычислении ω_2, ω_3 влияния сдвига увеличивается при увеличении угла конусности;
- 3) при вычислении ω_4 учет сдвига необходим в диапазоне $\alpha < \pi/4$;
- 4) при вычислении ω_5 сдвиговые деформации значимы независимо от угла раствора конуса.

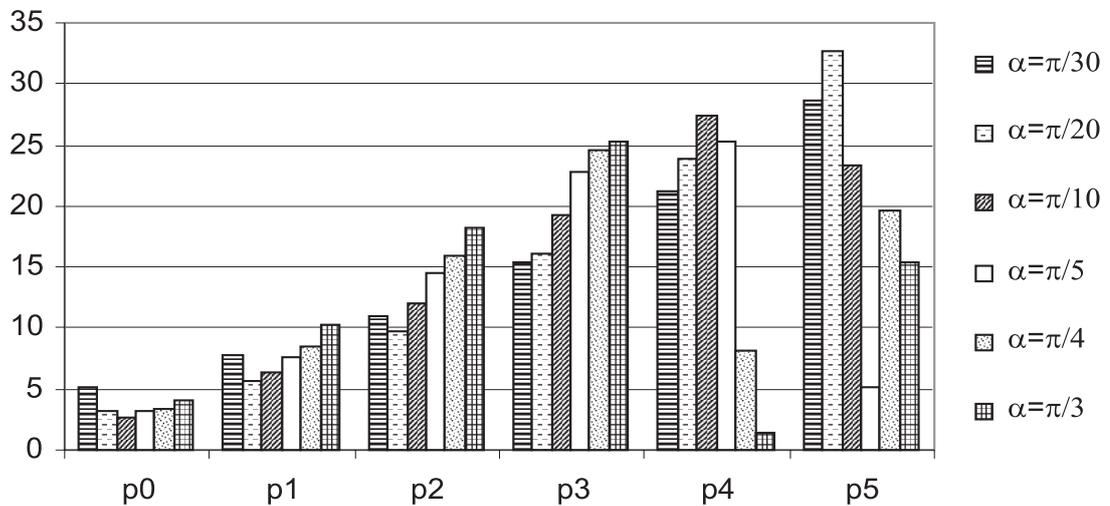


Рис. 3.13. Влияние угла конусности оболочки на погрешности p_0-p_5 вычисления частот $\omega_0-\omega_5$, обусловленные неучетом поперечных сдвиговых деформаций ($n = 2$).

3.2.6. ЗАВИСИМОСТЬ СОБСТВЕННЫХ ЧАСТОТ И СТЕПЕНИ ВЛИЯНИЯ НА НИХ ДЕФОРМАЦИЙ ПОПЕРЕЧНОГО СДВИГА ОТ ЖЕСТКОСТНЫХ ХАРАКТЕРИСТИК ПАКЕТА

В этом параграфе представлены результаты исследования зависимости значений собственных частот и погрешности, вносимой в их расчет неучетом поперечных сдвиговых деформаций, от жесткостных характеристик пакета.

3.2.6.1. ИЗМЕНЕНИЕ ЖЕСТКОСТНЫХ ХАРАКТЕРИСТИК ПАКЕТА ВСЛЕДСТВИЕ ВАРЬИРОВАНИЯ ИНТЕНСИВНОСТИ АРМИРОВАНИЯ СОСТАВЛЯЮЩИХ ЕГО СЛОЕВ

В заключение исследования частот армированной усеченной конической оболочки обсудим результаты, представленные в таблицах 3.6–3.8 и на рисунках 3.14, 3.15. Эти данные иллюстрируют зависимость низших частот трехслойной жестко защемленной оболочки от интенсивности армирования слоев в пакете.

Рассматривались трехслойные пакеты типа (2.26А), (2.26В), в каждом из которых варьировалась интенсивность меридионального армирования по вариантам (2.25а)–(2.25в). Ниже будем обозначать их через (А), (В) и (а)–(в) соответственно. Параметр волнообразования принимался равным 8.

С целью сравнить полученные результаты с выводами, сформулированными ранее относительно частот цилиндрической оболочки (глава 2, § 2.2.5), рассматривалась трехслойная коническая оболочка по параметрам близкая к цилиндрической оболочке с $R/h = 40$, $l/R = 2$. Механические характеристики конической оболочки, по-прежнему, определялись (3.14), а геометрические из следующих условий:

$$R_{(\text{основания конуса})} = R, h = h_{\text{цил}}, l = b - a,$$

$$\alpha = \pi/10, h_k - h_{k-1} = h/3, b/h = (b/R) \cdot (R/h) = 40/\sin\alpha = 130;$$

$$a/b = 1 - l/b = 1 - (l/R) \cdot (R/b) = 1 - 2\sin\alpha = 0.38.$$

В таблицах 3.6, 3.7 представлены значения погрешности, вносимой в расчетные значения низших собственных частот неучетом сдвига. На основе этих данных, а также учитывая выводы, сделанные при анализе таблиц 2.8, 2.9, приходим к следующим результатам ($n = 8$):

1. Наибольшее (наименьшее) влияние сдвига при укладке типа (А) наблюдается при тех вариантах армирования, для которых достигается наименьший (наибольший) уровень значимости сдвига в пакете типа (В). Это варианты интенсивности армирования (в) и (а). Заметим, что результат оказался инвариантен относительно рассматриваемых форм оболочки (цилиндрическая и коническая) (глава 2, § 2.2.5.1).

2. Диапазон получаемых значений погрешности в пакете типа (В) составил от 8% до 15% (длина – 7%), в пакете типа (А) – от 1% до 10% (длина – 9%). Тогда как для цилиндрической оболочки эти значения равны соответственно от 4% до 7% (длина – 3%) и от 0% до 19% (длина – 19%). Очевидно, что в случае конической оболочки влияние сдвига в меньшей степени зависит от укладки слоев, чем в случае цилиндрической оболочки. Возможно, это связано с тем, что в отличие от цилиндрической оболочки, в конической ярко выражена неоднородность параметра R/h вдоль образующей.

3. Независимо от принятого варианта интенсивности армирования меридиональных слоев, в пакете типа (В) разность между погрешностью, полученной при вычислении частоты ω_5 , и погрешностью, полученной для ω_0 , («вилка погрешности») сохраняется на уровне 7%. В случае цилиндрической оболочки была отмечена та же тенденция, однако «вилка» уже в 4 раза (уровень 1.5%). Следовательно, влияние сдвиговых деформаций на расчетные значения собственных частот мало изменяется при варьирова-

нии жесткости заполнителя с сохранением жесткости несущих слоев ($11.2\% \pm 3.8\%$).

4. В пакете типа (А), при изменении интенсивности армирования несущих слоев наблюдается скачкообразное изменение погрешности, вносимой неучетом сдвига. Так, если в пакете со средним слоем более жестким на сдвиг, чем несущие слои, влияние поперечных деформаций практически не выражено (от 1% до 2.5%), то увеличение жесткостных характеристик несущих слоев приводит к усилению этого влияния в 4 раза. Аналогичное состояние наблюдалось в цилиндрической оболочке с ростом погрешности до 7 раз. Причем сохраняются выводы, сделанные относительно зависимости уровня значимости сдвига от номера частоты.

5. Несмотря на отмеченные общие тенденции, зависимость расчетных значений собственных частот от поперечного сдвига в цилиндрической оболочке выражена ярче (до 20%), чем в конической (до 15%).

Таблица 3.6

| Погрешности p_0 – p_5 расчетных значений собственных частот ω_0 – ω_5 , обусловленные неучетом сдвиговых деформаций для пакета типа (А), % | | | | | | | |
|--|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-----------|
| $n = 8$ | p_0 | p_1 | p_2 | p_3 | p_4 | p_5 | max – min |
| (а) | 1.0 | 1.2 | 1.5 | 1.8 | 2.1 | 2.5 | 1.6 |
| (б) | 1.2 | 1.8 | 2.5 | 3.3 | 4.3 | 5.9 | 4.7 |
| (в) | 1.6 | 2.6 | 3.7 | 5.2 | 7.0 | 10 | 8.4 |
| диапазон | | | | | | | 1–10% |

Таблица 3.7

| Погрешности p_0 – p_5 расчетных значений собственных частот ω_0 – ω_5 , обусловленные неучетом сдвиговых деформаций для пакета типа (В), % | | | | | | | |
|--|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-----------|
| $n = 8$ | p_0 | p_1 | p_2 | p_3 | p_4 | p_5 | max – min |
| (а) | 8.6 | 9.3 | 10 | 11.7 | 14.2 | 15.2 | 6.6 |
| (б) | 8 | 8.8 | 9.4 | 11 | 13.2 | 14.6 | 6.6 |
| (в) | 7.7 | 8.2 | 8.8 | 10 | 12.2 | 13.8 | 6.1 |
| диапазон | | | | | | | 8–15% |

Значения частот как функций интенсивности армирования приведены на рисунках 3.14, 3.15 и в таблице 3.8. На основе этих данных, сформулированы следующие выводы:

1. При увеличении жесткостных характеристик пакета значения всех частот ω_0 – ω_5 увеличиваются.

2. В пакете типа (А) зависимость значений частот от интенсивности меридионального армирования можно считать существенной, поскольку при переходе от армирования по варианту (а) к варианту (в) значение частоты ω_0 изменяется на 16%, а частоты ω_5 – более чем на 50% (рис. 3.14). Аналогичная зависимость в пакете типа (В) менее выражена и составляет на частоте ω_0 менее 1%, а на частоте ω_5 – не более 3% (рис. 3.15).

Отметим, что перечисленные тенденции были отмечены в § 2.2.5.1 при изучении частот цилиндрической оболочки.

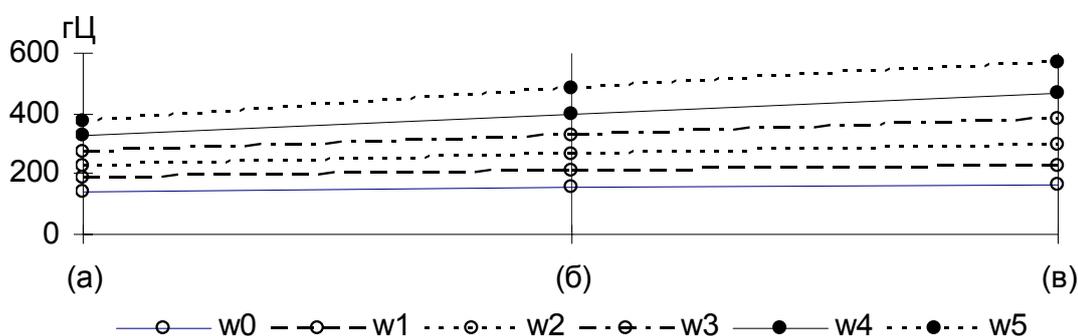


Рис. 3.14. Зависимость частот ω_0 – ω_5 от интенсивности армирования (а)–(в) в пакете типа (А).

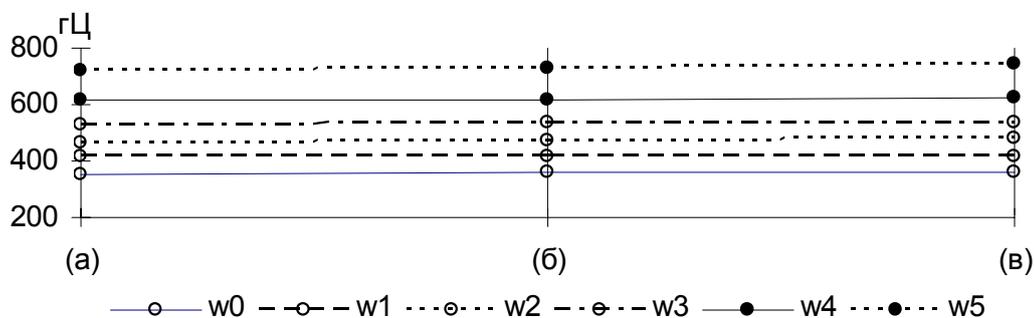


Рис. 3.15. Зависимость частот ω_0 – ω_5 от интенсивности армирования (а)–(в) в пакете типа (В).

Таблица 3.8

| Низшие собственные частоты усеченной конической оболочки как функции интенсивности армирования, Гц | | | | | | | | | | | | |
|--|--|------------|------------|------------|------------|------------|---|------------|------------|------------|------------|------------|
| | пакет типа (А), меридионально армированные несущие слои | | | | | | пакет типа (В), меридионально армированный наполнитель | | | | | |
| | ω_0 | ω_1 | ω_2 | ω_3 | ω_4 | ω_5 | ω_0 | ω_1 | ω_2 | ω_3 | ω_4 | ω_5 |
| (а) | 142 | 185 | 229 | 275 | 324 | 378 | 355 | 412 | 468 | 529 | 613 | 721 |
| (б) | 154 | 208 | 267 | 329 | 398 | 480 | 356 | 416 | 473 | 535 | 619 | 732 |
| (в) | 165 | 229 | 300 | 378 | 465 | 570 | 358 | 418 | 477 | 540 | 626 | 741 |
| ↑, % | 16 | 24 | 31 | 38 | 44 | 51 | 1 | 1 | 2 | 2 | 2 | 3 |
| ↓, % | 14 | 19 | 24 | 27 | 30 | 34 | 1 | 1 | 2 | 2 | 2 | 3 |

3.2.6.2. ВАРЬИРОВАНИЕ ОТНОСИТЕЛЬНОЙ ЖЕСТКОСТИ СЛОЕВ ТРЕХСЛОЙНОГО ИЗОТРОПНОГО ПАКЕТА

Ниже представлено исследование жестко заземленной трехслойной конической оболочки, собранной из изотропных слоев, симметричного относительно срединной поверхности строения. Геометрические параметры определены (3.13), коэффициент волнообразования $n = 2$, исключение составляют специально оговоренные случаи.

На рисунках 3.16, 3.17 и в таблице 3.9 представлены результаты исследования зависимости низших частот от параметра E_1/E_2 при $b/h = 60$ ($a/h = 18$).

Таблица 3.9

| Абсолютное [относительное] изменение $\Delta\omega_0 - \Delta\omega_5$ значений собственных частот $\omega_0 - \omega_5$ при варьировании параметра E_1/E_2 , (Гц [%] на 10 ед.) | | | | | | |
|--|-------------------|-------------------|-------------------|-------------------|-------------------|-------------------|
| $\Delta E_1/E_2 \setminus \Delta\omega_k$ | $-\Delta\omega_0$ | $-\Delta\omega_1$ | $-\Delta\omega_2$ | $-\Delta\omega_3$ | $-\Delta\omega_4$ | $-\Delta\omega_5$ |
| 20 – 10 | 6 [1.8] | 13 [2.1] | 23 [2.6] | 40 [3.5] | 65 [4.7] | 99 [6.0] |
| 30 – 20 | 4 [1.1] | 8 [1.3] | 14 [1.6] | 25 [2.3] | 42 [3.2] | 64 [4.1] |
| 40 – 30 | 3 [0.9] | 6 [0.9] | 10 [1.2] | 19 [1.8] | 31 [2.4] | 45 [3.0] |
| 50 – 40 | 2 [0.7] | 5 [0.8] | 8 [1.0] | 15 [1.4] | 24 [1.9] | 35 [2.4] |
| 60 – 50 | 2 [0.6] | 4 [0.6] | 7 [0.8] | 12 [1.2] | 19 [1.6] | 28 [2.0] |
| 70 – 60 | 2 [0.6] | 3 [0.5] | 6 [0.7] | 10 [1.0] | 16 [1.3] | 23 [1.7] |

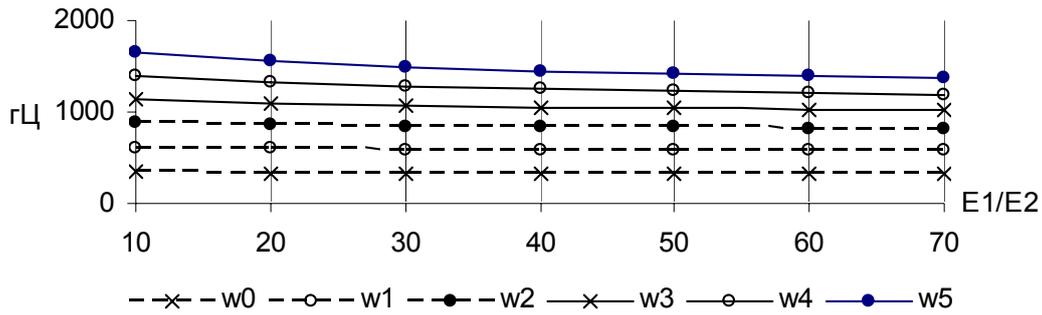


Рис. 3.16. Значения собственных частот ω_0 – ω_5 как функции параметра E_1/E_2 для $n = 2$.

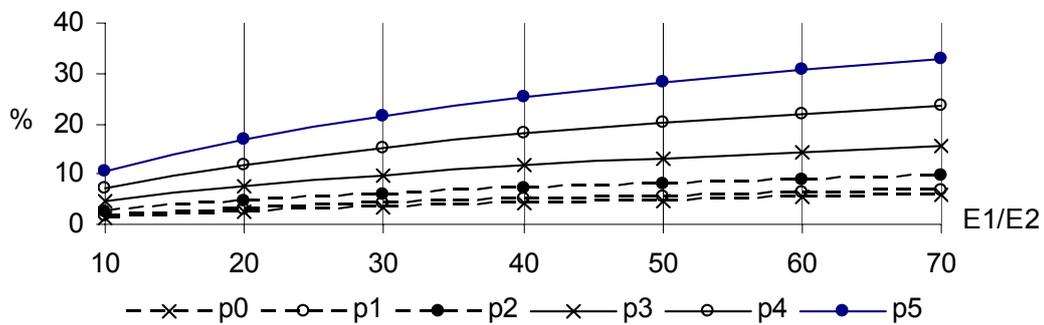


Рис. 3.17. Погрешности r_0 – r_5 , обусловленные неучетом сдвига при вычислении собственных частот ω_0 – ω_5 , как функция параметра E_1/E_2 для $n = 2$.

Анализируя графики, представленные на рисунках, и данные, на основе которых они построены, приходим к следующим выводам:

1. Значения всех частот ω_0 – ω_5 , вычисленных с учетом сдвига, монотонно убывают при увеличении параметра E_1/E_2 . При этом уменьшение значений незначительное: 6% для ω_0 – ω_1 , 8% для ω_2 , 11% для ω_3 , 14% для ω_4 и 18% для ω_5 . Наибольшая скорость убывания отмечается при $E_1/E_2 < 30$ (табл. 3.9), тогда как при $E_1/E_2 > 50$ можно наблюдать стабилизацию значений.

2. Значение погрешности, вносимой в расчет частот неучетом сдвигов, монотонно растет при увеличении параметра E_1/E_2 (рис. 3.17):

для ω_0 – с 1% до 6%, для ω_1 – с 2% до 7%, для ω_2 – с 3% до 10%,

для ω_3 – с 4% до 16%, для ω_4 – с 7% до 24%, для ω_5 – с 10% до 33%.

Суммируя сказанное (для оболочки с принятыми параметрами), заключаем: наблюдается незначительное уменьшение значений низших собственных частот при увеличении параметра E_1/E_2 (рис. 3.16); при этом учет сдвигов особенно важен в области $E_1/E_2 > 40$, поскольку в этом случае погрешность превышает 25%. Последнее подтверждает тот факт (см. [13, 14, 30, 67 и другие]), что чем жестче на сдвиг несущие слои (по сравнению с заполнителем), тем существеннее влияние сдвиговых деформаций.

3.2.6.3. ИЗМЕНЕНИЕ ЖЕСТКОСТИ ТРЕХСЛОЙНОГО ИЗОТРОПНОГО ПАКЕТА ВСЛЕДСТВИЕ ВАРЬИРОВАНИЯ ТОЛЩИН СЛОЕВ

Ниже, на рисунках 3.18–3.24 и в таблицах 3.10–3.11, представлены результаты исследования влияния толщины слоев пакета на значения низших частот, а так же на степень их зависимости от поперечных сдвиговых деформаций. Рассматривался жестко защемленный трехслойный симметричный по физическим характеристикам пакет, собранный из изотропных слоев. Отметим, что симметрии относительно геометрических характеристик не предполагалось. Коэффициент волнообразования $n = 2$; геометрические характеристики определялись (3.13) за исключением параметра b/h , значения которого в каждом случае оговариваются отдельно. Физические характеристики пакета определялись либо $E_1/E_2 = 0.1$, либо $E_1/E_2 = 70$.

Далее использовано обозначение, отражающее отношение толщин слоев в пакете (здесь $(h_k - h_{k-1})$ – толщина k -го слоя; h_k определено (1.2.1)):

$$Th_{ijk} \equiv (h_1 - h_0):(h_2 - h_1):(h_3 - h_2) = i:j:k.$$

Например, Th_{121} соответствует конической оболочке с отношением толщин слоев $(h_1 - h_0):(h_2 - h_1):(h_3 - h_2) = 1:2:1$, т. е. толщина заполнителя в 2 раза превышает толщину несущих слоев.

Влияние толщин на собственные частоты в оболочках с жестким внутренним слоем представлено при $b/h = 60$ на рисунке 3.18 и при $b/h = 20$

на рисунке 3.19 на примере пакета с $E_1/E_2=0,1$. Эти данные подтверждают сделанные выше выводы (§ 3.2.6.2, рис. 3.17), а также приводят к следующим заключениям (при малом значении параметра E_1/E_2):

1. Влияние сдвига можно считать несущественным. Поскольку при $b/h=60$ погрешность не превышает 1.2% (рис. 3.18), а при $b/h=20$ это значение не превосходит 10% (рис. 3.19).

2. Значимость сдвиговых деформаций возрастает по мере уменьшения толщины более жесткого, по сравнению с несущими слоями, заполнителя. В рассматриваемом случае наибольшее влияние сдвига зафиксировано в пакете Th313, что соответствует несущим слоям с толщиной втрое превосходящей толщину заполнителя.

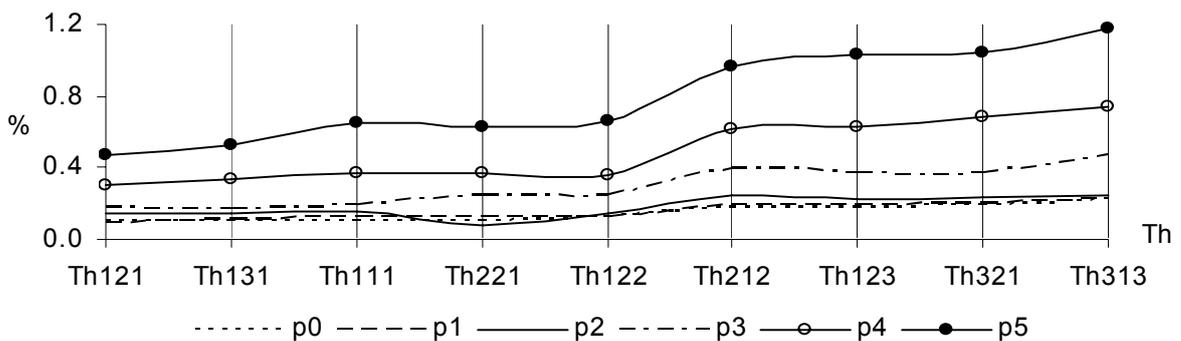


Рис. 3.18. Погрешности p_0 – p_5 расчетных значений собственных частот ω_0 – ω_5 , обусловленные неучетом сдвига, как функции толщины слоев пакета при $E_1/E_2 = 0.1$, $b/h = 60$.

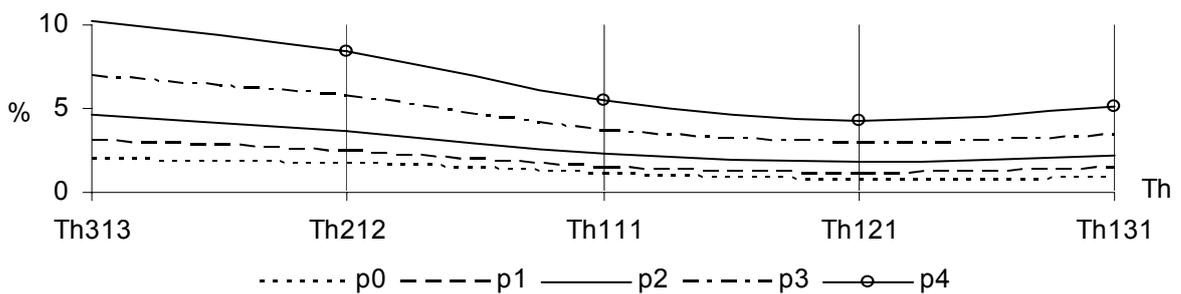


Рис. 3.19. Погрешности p_0 – p_5 расчетных значений собственных частот ω_0 – ω_5 , обусловленные неучетом сдвига, как функции толщины слоев пакета при $E_1/E_2 = 0.1$, $b/h = 20$.

Иная ситуация наблюдается для оболочек с податливым на сдвиг заполнителем и более жесткими несущими слоями. Это подтверждают результаты, полученные при $E_1/E_2=70$, которые приведены на рисунках

3.20–3.24 и в таблицах 3.10, 3.11. Все диаграммы соответствуют оболочкам, для которых $b/h = 50$, за исключением рис. 3.24 где $b/h = 100$.

На рисунке 3.20 погрешность от неучета сдвига рассматривалась как функция отношения толщин слоев пакета. Очевидно, что для всех частот максимальное значение погрешности, а следовательно и наибольшее влияние сдвига, зафиксировано для оболочек типа Th121 и Th131, а минимальное – для Th113 и Th311.

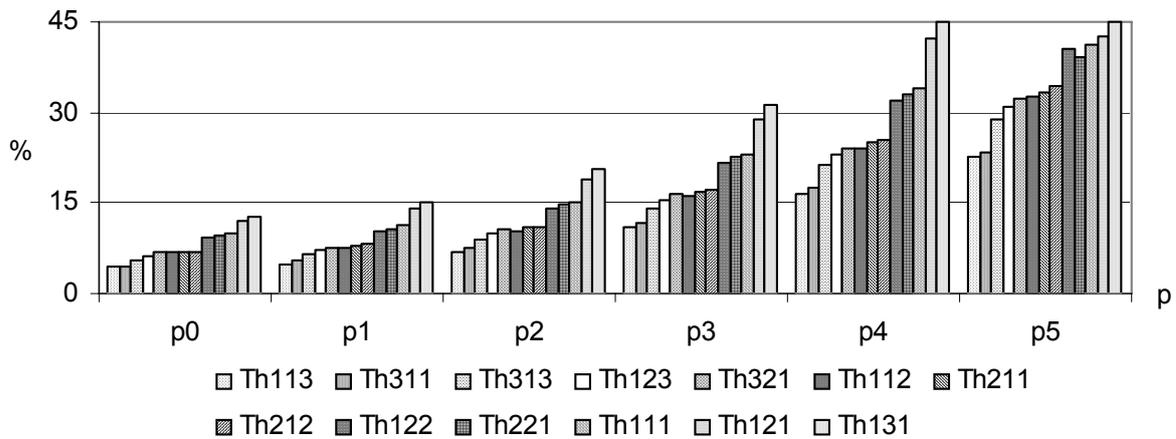


Рис. 3.20. Погрешности p_0 – p_5 расчета собственных частот ω_0 – ω_5 , обусловленные неучетом сдвига, как функции толщины слоев пакета при $E_1/E_2 = 70$, $b/h = 50$.

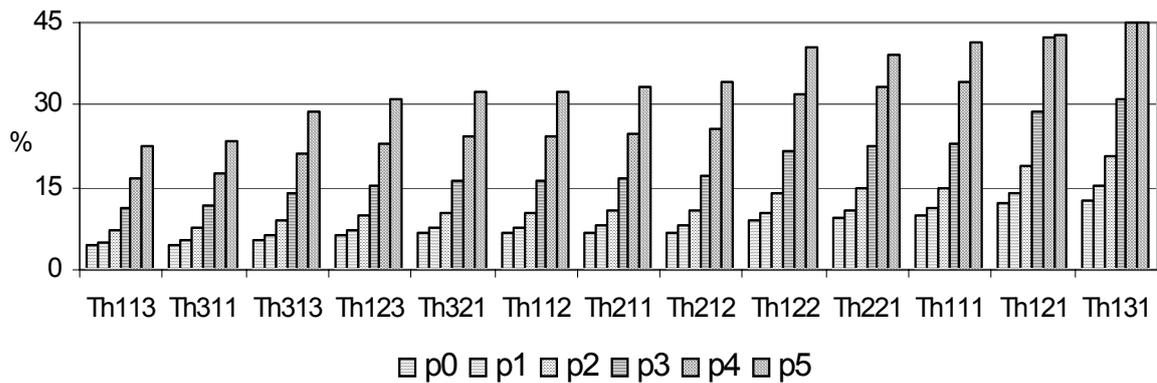


Рис. 3.21. Погрешности p_0 – p_5 от неучета сдвига, вносимые в расчетные значения собственных частот ω_0 – ω_5 , сгруппированные для каждого из рассматриваемых пакетов ($E_1/E_2 = 70$, $b/h = 50$).

Диаграмма 3.21 иллюстрирует изучаемую погрешность для каждого из рассматриваемых пакетов Th_{ijk} отдельно. Следует отметить общую тенденцию: значимость сдвига увеличивается с ростом номера частоты.

На рисунках 3.22, 3.23 представлены значения частот как функции от толщин слоев, полученные при $E_1/E_2 = 70$, $b/h = 50$. Отметим, что максимальное значение всех частот, вычисленных с учетом сдвиговых деформаций (рис. 3.22), достигается в пакете типа Th311, а минимальное – в пакете с относительными толщинами Th131.

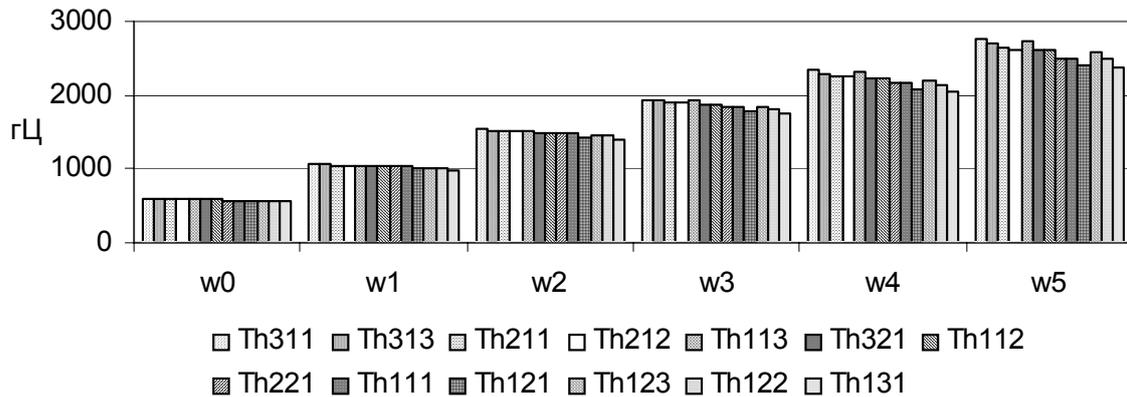


Рис. 3.22. Значения собственных частот $\omega_0-\omega_5$, рассчитанных с учетом сдвига, как функций Thijk при $E_1/E_2 = 70$, $b/h = 50$.

Максимумы и минимумы частот, вычисленных в рамках классической модели (рис. 3.23), соответствуют разным пакетам. Так, минимум первых четырех частот $\omega_0-\omega_3$ получен для оболочки типа Th123, а для частот ω_4 , ω_5 он достигается в пакете Th113. Максимальное значение «классических» частот $\omega_0-\omega_2$ достигается при Th121, частот ω_3 , ω_4 – при Th131, частоты ω_5 – при Th111.

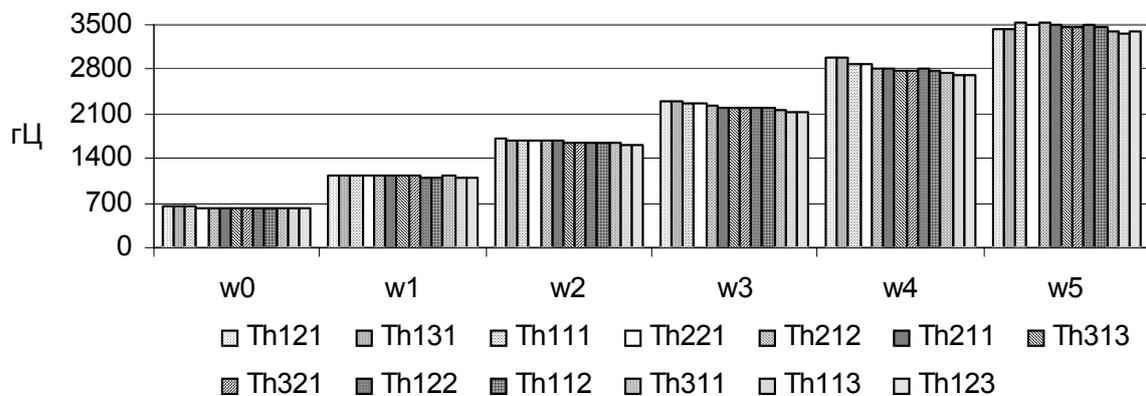


Рис. 3.23. Значения собственных частот $\omega_0-\omega_5$, рассчитанных без учета сдвига, как функций Thijk. Оболочки с параметрами $E_1/E_2 = 70$, $b/h = 50$.

Обобщая данные, иллюстрирующие зависимость значений низших собственных частот трехслойных пакетов при $b/h = 50$, можно сделать следующие выводы (табл. 3.10):

1. В результате изменения толщины изотропных слоев с податливым на сдвиг заполнителем ($E_1/E_2 = 70$) можно добиться увеличения (уменьшения) значений собственных частот от 5% для ω_0 до 17% (14%) для ω_5 . Аналогичная процедура для пакетов с более жестким, чем внешние слои средним слоем ($E_1/E_2 = 0.1$) приводит к увеличению (уменьшению) значений собственных частот до 16% (14%) в случае ω_0 и до 19% (16%) в случае ω_5 .

Этот результат можно считать следствием изменения диапазона значений, получаемого для каждой из частот при варьировании толщин слоев, составляющих пакет. Так, при более жестком среднем слое диапазон значений частоты ω_0 увеличивается в 7.3 раза, ω_1 – в 3.6 раза, ω_2 – в 2.4 раза, наконец, на частотах ω_4, ω_5 – в 1.2 раза.

Таблица 3.10

| Максимумы и минимумы частот, вычисленных с учетом сдвиговых деформаций, как функции относительных толщин пакета, Гц | | | | | | | | | | | | |
|---|---|------------|------------|------------|------------|------------|--|------------|------------|------------|------------|------------|
| | $E_1/E_2 = 70, b/h = 50$ (max Th311, min Th131) | | | | | | $E_1/E_2 = 0.1, b/h = 50$ (max Th131, min Th313) | | | | | |
| | ω_0 | ω_1 | ω_2 | ω_3 | ω_4 | ω_5 | ω_0 | ω_1 | ω_2 | ω_3 | ω_4 | ω_5 |
| max | 592 | 1061 | 1535 | 1943 | 2335 | 2761 | 1436 | 1821 | 1957 | 2121 | 2376 | 2704 |
| min | 565 | 985 | 1407 | 1753 | 2059 | 2363 | 1239 | 1551 | 1652 | 1799 | 2009 | 2278 |
| $\Delta\omega_k$ | 27 | 76 | 127 | 190 | 276 | 398 | 197 | 270 | 305 | 322 | 367 | 426 |
| $\uparrow, \%$ | 5 | 8 | 9 | 11 | 13 | 17 | 16 | 17 | 18 | 18 | 18 | 19 |
| $\downarrow, \%$ | 5 | 7 | 8 | 10 | 12 | 14 | 14 | 15 | 15 | 15 | 15 | 16 |

С целью расширить полученные данные, было проведено варьирование толщин на относительно тонких пакетах, в частности $b/h = 100$. На рисунке 3.24 и в таблице 3.11 представлены соответствующие результаты.

На основании этих расчетов можно констатировать ослабление (по сравнению с $b/h = 50$) зависимости от толщин слоев как значений частот,

так и влияния на них сдвига (рис. 3.21 и 3.24). Например, погрешность от неучета сдвигов для конической оболочки с параметрами $E_1/E_2 = 70$, $b/h = 100$ ($a/h = 30$) при расчете низших частот достигает значений (рис. 3.24) (нижняя граница $< 1\%$):

для $\omega_0 - \omega_2 - 3-4\%$, для $\omega_3 - 8\%$,

для $\omega_4 - 12\%$, для $\omega_5 - 19\%$;

тогда как при $E_1/E_2 = 70$, $b/h = 50$ ($a/h = 17$) эти значения выше (рис. 3.21):

для $\omega_0 -$ от 4% до 13% , для $\omega_1 -$ от 5% до 15% ,

для $\omega_2 -$ от 7% до 21% , для $\omega_3 -$ от 11% до 31% ,

для $\omega_4 -$ от 17% до 45% , для $\omega_5 -$ от 23% до 45% .

Заметим, что отмеченное ослабление влияния сдвиговых деформаций вызвано уменьшением относительной толщины оболочки в 2 раза (с $b/h = 50$ до $b/h = 100$).

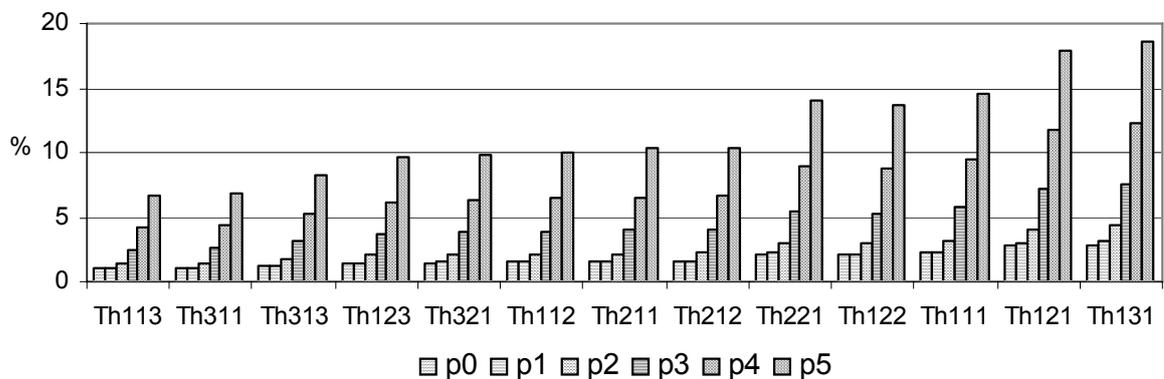


Рис. 3.24. Погрешности p_0-p_5 , вносимые неучетом сдвигов в расчетные значения собственных частот $\omega_0-\omega_5$, как функции Th_{ijk} при $E_1/E_2 = 70$, $b/h = 100$.

Та же тенденция наблюдается при исследовании значений низших собственных частот от относительной толщины слоев (табл. 3.11). Уменьшение относительной толщины всего пакета, т. е. b/h , приводит к уменьшению диапазона ($\Delta\omega_k$) получаемых значений частот $\omega_1-\omega_5$. И если для первых частот $\omega_1-\omega_2$ это сокращение можно считать незначительным (от 0.9 до 1.3 раза), то на частотах ω_3 происходит сужение границ диапазона в

1.7 раза, ω_4 – в 2.1 раза, наконец, на частоте ω_5 – в 2.5 раза. В итоге, происходит гашение разницы между максимальным и минимальным значением любой из первых шести частот, которая колеблется в пределах 5–7%. Можно предполагать стабилизацию частот «тонких» оболочек относительно толщины слоев пакета.

Сравнивая выводы по диапазонам частот, сделанные на основе данных, приведенных в таблицах 3.10 и 3.11, можно говорить о различной «чувствительности» собственных частот с разными номерами на изменение толщин изотропных слоев с существенно различающимися физико-геометрическими характеристиками. Так, изменение жесткостных характеристик заполнителя по отношению к несущим слоям (табл. 3.10) проявилось в значительном изменении диапазона первых частот ω_0 – ω_2 . Однако рассмотрение оболочки с другим отношением линейных размеров прежде всего сказывается на диапазоне частот ω_3 – ω_5 (табл. 3.11).

Таблица 3.11

| Максимумы и минимумы частот, вычисленных с учетом сдвиговых деформаций, как функции относительных толщин пакета, Гц | | | | | | | | | | | | |
|---|---|------------|------------|------------|------------|------------|--|------------|------------|------------|------------|------------|
| | $E_1/E_2 = 70, b/h = 50$ (max Th311, min Th131) | | | | | | $E_1/E_2 = 70, b/h = 100$ (max Th313, min Th131) | | | | | |
| | ω_0 | ω_1 | ω_2 | ω_3 | ω_4 | ω_5 | ω_0 | ω_1 | ω_2 | ω_3 | ω_4 | ω_5 |
| max | 592 | 1061 | 1535 | 1943 | 2335 | 2761 | 544 | 1011 | 1450 | 1773 | 2054 | 2350 |
| min | 565 | 985 | 1407 | 1753 | 2059 | 2363 | 515 | 946 | 1354 | 1660 | 1924 | 2189 |
| $\Delta\omega_k$ | 27 | 76 | 127 | 190 | 276 | 398 | 29 | 65 | 96 | 113 | 130 | 161 |
| $\uparrow, \%$ | 5 | 8 | 9 | 11 | 13 | 17 | 6 | 7 | 7 | 7 | 7 | 7 |
| $\downarrow, \%$ | 5 | 7 | 8 | 10 | 12 | 14 | 5 | 6 | 7 | 6 | 6 | 7 |

3.2.7. СРАВНЕНИЕ НИЖНЕГО УЧАСТКА СПЕКТРА ЖЕСТКО ЗАЩЕМЛЕННОЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ И ЖЕСТКО ЗАЩЕМЛЕННОЙ УСЕЧЕННОЙ КОНИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧЕК

На рисунках 3.25, 3.26 и в таблицах 3.12, 3.13 представлены результаты, полученные при сравнении низших частот усеченной конической обо-

лочки с соответствующими частотами близкой цилиндрической оболочки. Так, их механические параметры одинаковы, а геометрические выбираются следующим образом:

$$R_{cl} = R_{cone}, h_{cl} = h_{cone}, l_{cl} = b - a. \quad (3.16)$$

Здесь R_{cl} , h_{cl} , l_{cl} – радиус основания, толщина и длина цилиндрической оболочки; R_{cone} , h_{cone} , $(b - a)$ – радиус нижнего основания, толщина и длина образующей конической оболочки.

Рассматривались изотропные трехслойные жестко заземленные оболочки. Геометрические характеристики конической оболочки определялись по (3.13) лишь $b/h = 100$, физические – из соотношения $E_1/E_2 = 70$, $E_1 = E_3$. Коэффициент волнообразования $n = 2$.

Отмечено, что для всех рассматриваемых пакетов значение частот $\omega_0 - \omega_2$ меньше для конической оболочки, а значения частот $\omega_3 - \omega_5$ меньше для цилиндрической оболочки (табл. 3.12). При этом в поведении разности $\gamma_k = \omega_{k,cl} - \omega_{k,cone}$ наблюдается некоторая «нечетная» симметрия относительно значений частот ω_2, ω_3 (рис. 3.25).

Таблица 3.12

| Разность γ между собственными частотами цилиндра ω_{cl} и конуса ω_{cone} при изменении относительной толщины слоев пакета трехслойных жестко заземленных оболочек, Гц | | | | | | |
|---|------------|------------|------------|------------|-------------|-------------|
| | Γ_0 | Γ_1 | Γ_2 | Γ_3 | Γ_4 | Γ_5 |
| max /Thijk | 119 /Th113 | 152 /Th113 | 29 /Th123 | -61 /Th131 | -113 /Th131 | -147 /Th131 |
| min /Thijk | 99 /Th131 | 135 /Th131 | 21 /Th321 | -80 /Th321 | -138 /Th321 | -178 /Th321 |
| $\Gamma_{\text{средне знач-ие}}$ | 113 | 148 | 26 | -73 | -131 | -147 |
| $\Delta\Gamma_k$ | 21 | 17 | 8 | 19 | 25 | 31 |
| $d_k = \Delta\Gamma_k / \Gamma_{\text{ср}}$ | 18% | 11% | 31% | -26% | -19% | -18% |

На основе таблицы 3.12 сделаны следующие выводы:

1. Значение первой (шестой) собственной частоты ω_0 (ω_5) конической оболочки меньше (больше), чем в цилиндрической оболочке с близкими характеристиками на всех рассмотренных пакетах (табл. 3.12). Значение разности их значений составляет в среднем 18%.

2. Интервал $[\omega_{0,cl}; \omega_{5,cl}]$ содержится в интервале $[\omega_{0,cone}; \omega_{5,cone}]$.

3. Разность между максимальными и минимальными значениями каждой из низших частот относительно различных пакетов Thijk составляет 6–7%, независимо от формы; причем достигаются эти значения на пакетах одного типа: Th313 (max) и Th131 (min).

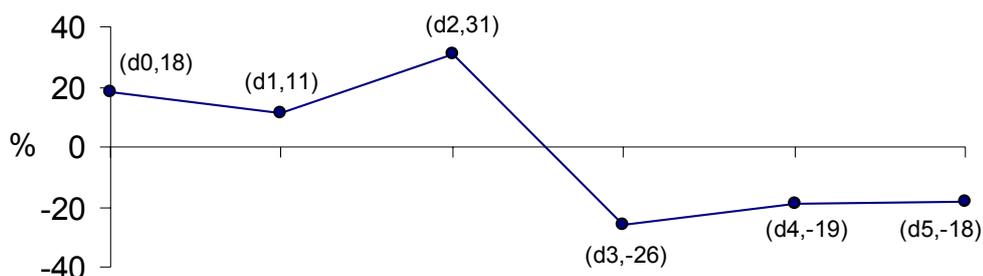


Рис. 3.25. Относительное изменение d_k собственных частот оболочки ω_k , обусловленное изменением ее формы, т.е. при переходе от цилиндра к конусу. Рассчитано относительно среднего значения разности Γ_k , полученного при варьировании толщин пакетов.

Относительно погрешности, вносимой в расчет частот неучетом поперечных деформаций, можно отметить следующее (табл. 3.13, рис. 3.24 для конической и рис. 3.26 для цилиндрической оболочек):

1. При расчете частот ω_4 – ω_5 цилиндрической оболочки значение погрешности больше соответствующего значения погрешности в конической оболочке в 1.4–1.7 раза. Причем для частоты ω_5 увеличение в 1.7 раз стабильно наблюдается во всех рассматриваемых в пакетах (табл. 3.13).

2. Независимо от формы оболочки значение погрешности увеличивается с ростом номера частоты, достигая в конической оболочке 20% и в цилиндрической – 30% (рис. 3.24, 3.26).

3. Независимо от формы оболочки максимальное и минимальное значение погрешности зафиксировано на следующих пакетах: максимальное на Th131 и минимальное на Th113, Th311 (значение погрешности на этих пакетах совпадает с точностью до 0.01%) (рис. 3.24, 3.26).

Итак, при рассматриваемых параметрах, для цилиндрической оболочки нижний участок спектра расположен выше и компактней, чем в случае близкой конической. Влияние сдвига, в этом случае, так же существеннее в цилиндрической оболочке.

Таблица 3.13

| Погрешности p_3 – p_5 вычисления частот ω_3 – ω_5 , вносимые неучетом сдвиговых деформаций, для цилиндрической и конической оболочек при $E_1/E_2 = 70$, $n = 2$ | | | | | | | | | | | | | |
|---|--|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| | Отношение толщин слоев в пакете, $Th_{ijk} \equiv (h_1 - h_0):(h_2 - h_1):(h_3 - h_2) = i:j:k$ | | | | | | | | | | | | |
| погрешность | 1:1:3 | 3:1:1 | 3:1:3 | 1:2:3 | 3:2:1 | 1:1:2 | 2:1:1 | 2:1:2 | 2:2:1 | 1:2:2 | 1:1:1 | 1:2:1 | 1:3:1 |
| p_3 , цил | 3 | 3 | 4 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | 7 | 7 | 7 | 10 | 10 |
| p_3 , конус | 3 | 3 | 3 | 4 | 4 | 4 | 4 | 4 | 5 | 5 | 6 | 7 | 8 |
| p_3 , цил / p_3 , конус | 1 | 1 | 1.3 | 1.3 | 1.3 | 1.3 | 1.3 | 1.3 | 1.4 | 1.4 | 1.1 | 1.4 | 1.3 |
| p_4 , цил | 7 | 7 | 8 | 10 | 10 | 10 | 10 | 10 | 14 | 14 | 15 | 19 | 20 |
| p_4 , конус | 4 | 4 | 5 | 6 | 6 | 6 | 7 | 7 | 9 | 9 | 9 | 12 | 12 |
| p_4 , цил / p_4 , конус | 1.7 | 1.7 | 1.6 | 1.7 | 1.7 | 1.7 | 1.4 | 1.4 | 1.6 | 1.6 | 1.7 | 1.6 | 1.7 |
| p_5 , цил | 11 | 11 | 14 | 16 | 16 | 17 | 17 | 17 | 23 | 23 | 24 | 30 | 32 |
| p_5 , конус | 7 | 7 | 8 | 10 | 10 | 10 | 10 | 10 | 14 | 14 | 14 | 18 | 19 |
| p_5 , цил / p_5 , конус | 1.6 | 1.6 | 1.7 | 1.6 | 1.6 | 1.7 | 1.7 | 1.7 | 1.6 | 1.6 | 1.7 | 1.7 | 1.7 |

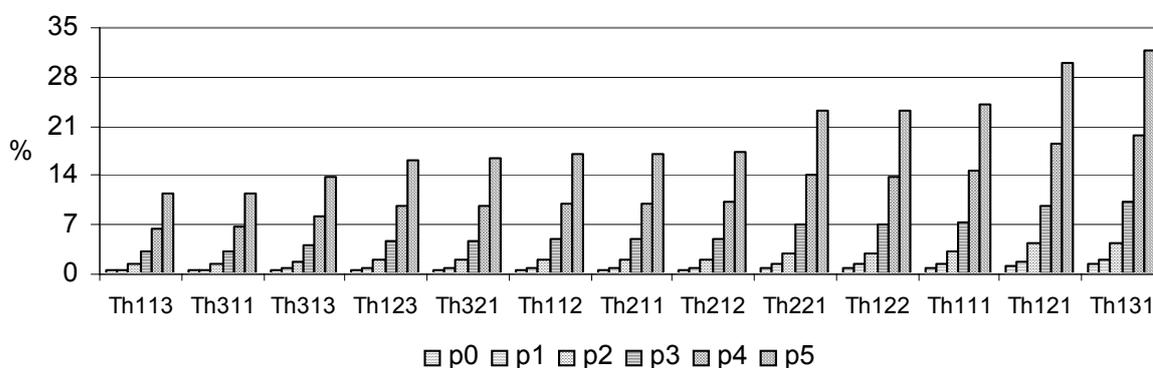


Рис. 3.26. Погрешность p_0 – p_5 расчета собственных частот ω_0 – ω_5 цилиндрической оболочки с характеристиками (3.16), вносимая неучетом сдвига.

ГЛАВА 4. СВОБОДНЫЕ КОЛЕБАНИЯ МНОГОСЛОЙНОГО СФЕРИЧЕСКОГО ПОЯСА

В этой главе представлено решение задачи о собственных установившихся гармонических колебаниях многослойного армированного сферического пояса. Выполнен параметрический анализ расчетных значений собственных частот и соответствующих им форм колебаний. Оценено влияние поперечных сдвиговых деформаций, а также закона их распределения по толщине оболочки на начальный участок спектра.

4.1 ПОСТАНОВКА И РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ

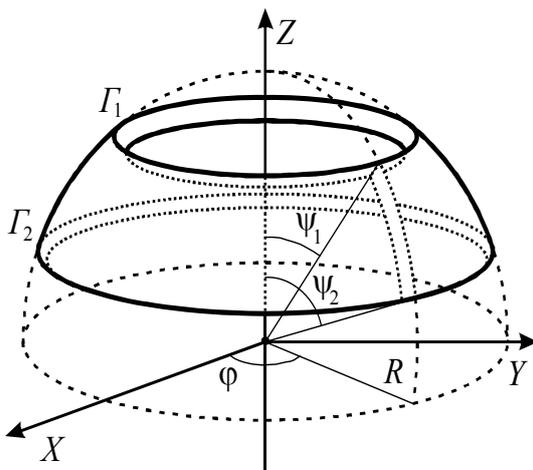


Рис. 4.1. Сферический пояс с меридианом длины $l = R \cdot (\psi_2 - \psi_1)$.

Рассмотрим многослойную сферическую оболочку радиуса R , толщины h , собранную из m упругих армированных ортотропных слоев постоянной толщины. Считая, что угол ψ соответствует долготе в сферической системе координат, вырежем из оболочки сферический пояс (рис. 4.1), построив два нормальных сечения $\psi = \psi_1$ (Γ_1) и $\psi = \psi_2$ (Γ_2).

На внутренней поверхности пояса введем систему гауссовых координат s, φ , где $s = x^1$ – длина дуги меридиана, отсчитываемая от поверхности Γ_1 ($s = 0$) до поверхности Γ_2 ($s = l$); $\varphi = x^2$ – угловая координата ($0 \leq \varphi \leq 2\pi$). Параметры Ламе A_1, A_2 и радиусы кривизны R_1, R_2 этих линий (см. табл. 1.1):

$$A_1 = 1, A_2 = R \cdot \sin \psi, R_1 = R_2 = R, \quad (4.1)$$

где $\psi = \psi_1 + s / R$, $l = R \cdot (\psi_2 - \psi_1)$, $0 \leq s \leq l$.

Система уравнений свободных колебаний (1.2.14)–(1.2.20) сферического пояса с учетом (4.1) запишется в виде:

— соотношения напряжения–деформации

$$\begin{aligned} \sigma_{ss}^{(k)} &= a_{11} \varepsilon_{ss}^{(k)} + a_{12} \varepsilon_{\varphi\varphi}^{(k)}, \quad \sigma_{\varphi\varphi}^{(k)} = a_{12} \varepsilon_{ss}^{(k)} + a_{22} \varepsilon_{\varphi\varphi}^{(k)}, \\ \sigma_{s\varphi}^{(k)} &= \sigma_{\varphi s}^{(k)} = a_{33} \varepsilon_{s\varphi}^{(k)}, \quad \tau_{sz}^{(k)} = G_{13} \gamma_{sz}^{(k)}, \quad \tau_{\varphi z}^{(k)} = G_{23} \gamma_{\varphi z}^{(k)}. \end{aligned} \quad (4.2)$$

— закон распределения физических составляющих вектора перемещения по толщине пакета слоев

$$\begin{aligned} v_s^{(k)} &= u_s - z \frac{\partial w}{\partial s} + \mu_{11}^{(k)} \pi_s, \quad v_z^{(k)} = w, \\ v_\varphi^{(k)} &= u_\varphi - \frac{z}{R \sin \psi} \frac{\partial w}{\partial \varphi} + \mu_{22}^{(k)} \pi_\varphi. \end{aligned} \quad (4.3)$$

— соотношения деформации–перемещения:

$$\begin{aligned} \gamma_{sz}^{(k)} &= \frac{f'(z) \pi_s}{G_{13}^{(k)}}, \quad \gamma_{\varphi z}^{(k)} = \frac{f'(z) \pi_\varphi}{G_{23}^{(k)}}, \quad \varepsilon_{zz}^{(k)} = 0, \\ \varepsilon_{ss}^{(k)} &= \frac{\partial u_s}{\partial s} - z \frac{\partial^2 w}{\partial s^2} + \frac{\partial(\mu_{11}^{(k)} \pi_s)}{\partial s} + \frac{w}{R}, \quad \varepsilon_{\varphi\varphi}^{(k)} = \frac{1}{R \sin \psi} \times \\ &\times \left\{ \frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} - \frac{z}{R \sin \psi} \frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2} + \mu_{22}^{(k)} \frac{\partial \pi_\varphi}{\partial \varphi} + \cos \psi \cdot \left(u_s - z \frac{\partial w}{\partial s} + \mu_{11}^{(k)} \pi_s \right) + w \sin \psi \right\}, \\ 2\varepsilon_{s\varphi}^{(k)} &= \frac{\partial u_\varphi}{\partial s} - \frac{2z}{R \sin \psi} \frac{\partial^2 w}{\partial s \partial \varphi} + \frac{2z \cos \psi}{R^2 \sin^2 \psi} \frac{\partial w}{\partial \varphi} + \frac{\partial(\mu_{22}^{(k)} \pi_\varphi)}{\partial s} + \\ &+ \frac{1}{R \sin \psi} \left\{ \frac{\partial u_s}{\partial \varphi} + \mu_{11}^{(k)} \frac{\partial \pi_s}{\partial \varphi} - \cos \psi \cdot \left(u_\varphi + \mu_{22}^{(k)} \pi_\varphi \right) \right\}. \end{aligned} \quad (4.4)$$

— выражение физических составляющих обобщенных усилий и моментов через физические составляющие тензора напряжений в слоях оболочки:

$$[T_{s\varphi}, M_{s\varphi}, S_{s\varphi}, S_{\varphi s}] = \sum_{k=1}^m \int_{h_{k-1}}^{h_k} \sigma_{s\varphi}^{(k)} [1, z, \mu_{22}^{(k)}, \mu_{11}^{(k)}] dz, \quad (4.5)$$

$$[T_{ss}, M_{ss}, S_{ss}] = \sum_{k=1}^m \int_{h_{k-1}}^{h_k} \sigma_{ss}^{(k)} [1, z, \mu_{11}^{(k)}] dz,$$

$$[T_{\varphi\varphi}, M_{\varphi\varphi}, S_{\varphi\varphi}] = \sum_{k=1}^m \int_{h_{k-1}}^{h_k} \sigma_{\varphi\varphi}^{(k)} [1, z, \mu_{22}^{(k)}] dz,$$

$$Q_s = \sum_{k=1}^m \int_{h_{k-1}}^{h_k} \left\{ \sigma_{ss}^{(k)} \frac{\partial \mu_{11}^{(k)}}{\partial s} + \frac{\text{ctg} \psi}{R} \sigma_{\varphi\varphi}^{(k)} \mu_{11}^{(k)} \right\} dz + \sum_{k=1}^m \int_{h_{k-1}}^{h_k} \frac{\tau_{sz}^{(k)} f'(z)}{G_{13}^{(k)}} dz - \frac{\text{ctg} \psi}{R} S_{\varphi\varphi},$$

$$Q_\varphi = \sum_{k=1}^m \int_{h_{k-1}}^{h_k} \sigma_{s\varphi}^{(k)} \frac{\partial \mu_{22}^{(k)}}{\partial s} dz + \sum_{k=1}^m \int_{h_{k-1}}^{h_k} \frac{\tau_{\varphi z}^{(k)} f'(z)}{G_{23}^{(k)}} dz + \frac{\text{ctg} \psi}{R} (S_{\varphi s} - S_{s\varphi}).$$

— выражения интегральных характеристик даламберовых сил инерции

$$[\dot{X}_s, \dot{Y}_s, \dot{Z}_s] = \sum_{k=1}^m \int_{h_{k-1}}^{h_k} \rho_{(k)} \dot{v}_s^{(k)} [1, z, \mu_{11}^{(k)}] dz, \quad (4.6)$$

$$[\dot{X}_\varphi, \dot{Y}_\varphi, \dot{Z}_\varphi] = \sum_{k=1}^m \int_{h_{k-1}}^{h_k} \rho_{(k)} \dot{v}_\varphi^{(k)} [1, z, \mu_{22}^{(k)}] dz, \quad I = \dot{w} \sum_{k=1}^m \int_{h_{k-1}}^{h_k} \rho_{(k)} dz.$$

— выражения для компонент тензора $\mu^{(k)}$ (1.2.24);

— дифференциальные уравнения свободных колебаний:

$$R \sin \psi \frac{\partial T_{ss}}{\partial s} + \cos \psi \cdot (T_{ss} - T_{\varphi\varphi}) + \frac{\partial T_{s\varphi}}{\partial \varphi} + \omega^2 R \sin \psi \cdot X_s = 0, \quad (4.7)$$

$$R \sin \psi \frac{\partial T_{s\varphi}}{\partial s} + 2 \cos \psi \cdot T_{s\varphi} + \frac{\partial T_{\varphi\varphi}}{\partial \varphi} + \omega^2 R \sin \psi \cdot X_\varphi = 0,$$

$$\frac{\partial}{\partial s} \left[R \sin \psi \frac{\partial M_{ss}}{\partial s} + \cos \psi \cdot (M_{ss} - M_{\varphi\varphi}) + 2 \frac{\partial M_{s\varphi}}{\partial \varphi} + \omega^2 R \sin \psi \cdot Y_s \right] +$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{R \sin \psi} \frac{\partial^2 M_{\varphi\varphi}}{\partial \varphi^2} + \frac{2}{R \cdot \operatorname{tg} \psi} \frac{\partial M_{s\varphi}}{\partial \varphi} - \sin \psi \cdot (T_{ss} + T_{\varphi\varphi}) + \omega^2 \left(R \sin \psi \cdot I + \frac{\partial Y_{\varphi}}{\partial \varphi} \right) = 0, \\
& R \sin \psi \frac{\partial S_{ss}}{\partial s} + \cos \psi \cdot (S_{ss} - S_{\varphi\varphi}) + \frac{\partial S_{\varphi s}}{\partial \varphi} - R \sin \psi \cdot Q_s + \omega^2 R \sin \psi \cdot Z_s = 0, \\
& R \sin \psi \cdot \frac{\partial S_{s\varphi}}{\partial s} + \cos \psi \cdot (S_{s\varphi} + S_{\varphi s}) + \frac{\partial S_{\varphi\varphi}}{\partial \varphi} - R \sin \psi \cdot Q_{\varphi} + \omega^2 R \sin \psi \cdot Z_{\varphi} = 0.
\end{aligned}$$

Система (4.2)–(4.7) замыкается однородными краевыми условиями. В рассматриваемом случае, они заключаются в требовании обращения в нуль на торцах $s=0$ и $s=l$ шести кинематических и (или) силовых характеристик, альтернативно выбираемых из шести пар (1.2.25):

$$\begin{aligned}
& (T_{ss}, u_s), \quad (T_{s\varphi}, u_{\varphi}), \quad \left(M_{ss}, \frac{u_s}{R} - \frac{\partial w}{\partial s} \right), \quad (S_{ss}, \pi_s), \quad (S_{s\varphi}, \pi_{\varphi}), \quad (4.8) \\
& \left(R \sin \psi \frac{\partial M_{ss}}{\partial s} + \cos \psi \cdot (M_{ss} - M_{\varphi\varphi}) + 2 \frac{\partial M_{s\varphi}}{\partial \varphi} + \omega^2 R \sin \psi \cdot Y_s, w \right).
\end{aligned}$$

Также, в силу замкнутости контура оболочки, все характеристики напряженно-деформированного состояния должны удовлетворять условиям 2π -периодичности по угловой координате φ .

Ниже рассматривалось два способа контурного закрепления: (а) – жестко защемленные контуры Γ_1, Γ_2 ; (б) – на контуре Γ_1 крепление жесткое, а Γ_2 свободен от усилий. Условия (4.8) в этих случаях следующие:

$$(a) \quad \text{при } s=0 \text{ и } s=l \quad u_s = u_{\varphi} = \partial w / \partial s = \pi_s = \pi_{\varphi} = w = 0; \quad (4.9)$$

$$(b) \quad \text{при } s=0 \quad u_s = u_{\varphi} = \partial w / \partial s = \pi_s = \pi_{\varphi} = w = 0 \quad (4.10)$$

$$\text{при } s=l \quad T_{ss} = T_{s\varphi} = M_{ss} = S_{ss} = S_{s\varphi} = 0,$$

$$R \sin \psi \frac{\partial M_{ss}}{\partial s} + \cos \psi \cdot (M_{ss} - M_{\varphi\varphi}) + 2 \frac{\partial M_{s\varphi}}{\partial \varphi} + \omega^2 R \sin \psi \cdot Y_s = 0.$$

Таким образом, сформулирована однородная краевая задача для системы дифференциальных уравнений в частных производных (4.2)–(4.7).

Поскольку физический интерес представляют лишь нетривиальные решения этой системы, то проблема поиска собственных частот и форм колебаний сферического пояса сведена к отысканию параметров ω , при которых такие решения существуют. Следовательно, первоначальная задача о собственных колебаниях многослойного сферического пояса эквивалентна задаче о собственных значениях и собственных элементах системы дифференциальных уравнений с частными производными (4.2)–(4.8).

Для перехода к векторно-матричной форме вводим безразмерные переменные (1.2.26), полагая $L = l$:

$$x = \frac{s}{l}, \frac{\partial}{\partial s} = \frac{1}{l} \frac{\partial}{\partial x}, \gamma = \frac{h}{R}, \delta = \frac{l}{R}, \sin \psi = \sin\left(\psi_1 + \frac{s}{R}\right), \sin \psi = \sin(\psi_1 + \delta x),$$

$$w = h \cdot y_1, y_2 = \frac{\partial y_1}{\partial x}, u_s = R \cdot y_3, u_\varphi = R \cdot y_4, \pi_s = \frac{E_1^c R}{h^{\alpha+1}} y_5, u_\varphi = \frac{E_1^c R}{h^{\alpha+1}} y_6,$$

$$R \sin \psi \cdot \frac{\partial M_{ss}}{\partial s} + \cos \psi (M_{ss} - M_{\varphi\varphi}) + 2 \frac{\partial M_{s\varphi}}{\partial \varphi} + R \sin \psi \cdot \omega^2 Y_s = h^2 E_1^c y_7,$$

$$\sin \psi \cdot M_{ss} = h^2 E_1^c y_8, \sin \psi \cdot T_{ss} = h E_1^c y_9, \sin \psi \cdot T_{s\varphi} = h E_1^c y_{10},$$

$$\sin \psi \cdot S_{ss} = h^{\alpha+2} y_{11}, \sin \psi \cdot S_{s\varphi} = h^{\alpha+2} y_{12}, \bar{\rho}_k = \frac{R^2}{E_1^c} \rho_k.$$

Параметр α определяется функцией распределения сдвиговых деформаций $f(z)$, принятой в форме (1.2.2). В этих переменных система (4.2)–(4.8) записывается в матричной форме (1.4.1)–(1.4.3):

$$A(x, D_\varphi) \frac{\partial y}{\partial x} = B(x, D_\varphi) y + \omega^2 C(x, D_\varphi) y, \quad (4.12)$$

$$My(0, \varphi) = O_6, Ny(1, \varphi) = O_6, y(x, \varphi) = y(x, \varphi + 2\pi).$$

Здесь A, B, C – 12×12 матрицы, элементы которых – полиномы от дифференциального оператора D_φ с переменными относительно x коэффициентами; матрицы M, N размера 6×12 имеют следующее строение

в случае (4.9)

$$M = N = [E_6, O_6],$$

в случае (4.10):

$$M = [E_6, O_6], N = [O_6, E_6].$$

Используя обозначения (2.16), (2.17), приведем ненулевые элементы матриц A, B, C : (4.13)

$$\begin{aligned}
a_{11} &= 1, a_{22} = -\frac{\gamma^2 \sin \psi}{\delta^2} \sum_{k=1}^m s_k b_{11}^{(k)} t_{2k}, a_{23} = \frac{\sin \psi}{\delta} \sum_{k=1}^m s_k b_{11}^{(k)} t_{1k}, a_{32} = -\frac{\gamma^2}{\delta} a_{23}, \\
a_{25} &= \frac{\sin \psi}{\delta} \sum_{k=1}^m s_k b_{11}^{(k)} \bar{r}_{11k}, a_{33} = \frac{\sin \psi}{\delta} \sum_{k=1}^m s_k b_{11}^{(k)} t_{0k}, a_{35} = \frac{\sin \psi}{\delta} \sum_{k=1}^m s_k b_{11}^{(k)} \bar{r}_{10k}, \\
a_{44} &= \frac{\sin \psi}{\delta} \sum_{k=1}^m s_k b_{33}^{(k)} t_{0k}, a_{46} = \frac{\sin \psi}{\delta} \sum_{k=1}^m s_k b_{33}^{(k)} \bar{r}_{20k}, a_{52} = -\frac{\gamma^2}{\delta} a_{25}, a_{53} = a_{35}, \\
a_{55} &= \frac{\sin \psi}{\delta} \sum_{k=1}^m s_k b_{11}^{(k)} r_{11k}, a_{64} = a_{46}, a_{66} = \frac{\sin \psi}{\delta} \sum_{k=1}^m s_k b_{33}^{(k)} r_{22k}, a_{77} = 1, a_{88} = 1, \\
a_{72} &= \frac{\gamma \sin \psi}{\delta} \sum_{k=1}^m s_k b_{12}^{(k)} \left(t_{1k} - \frac{\gamma}{\sin^2 \psi} t_{2k} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right), a_{74} = 2 \operatorname{ctg} \psi \sum_{k=1}^m s_k b_{33}^{(k)} t_{1k} \frac{\partial}{\partial \varphi}, \\
a_{73} &= -\frac{\sin \psi}{\gamma} \sum_{k=1}^m s_k b_{12}^{(k)} \left(t_{0k} - \frac{\gamma}{\sin^2 \psi} t_{1k} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right), a_{76} = 2 \operatorname{ctg} \psi \sum_{k=1}^m s_k b_{33}^{(k)} \bar{r}_{21k} \frac{\partial}{\partial \varphi}, \\
a_{75} &= -\frac{\sin \psi}{\gamma} \sum_{k=1}^m s_k b_{12}^{(k)} \left(\bar{r}_{10k} - \frac{\gamma}{\sin^2 \psi} \bar{r}_{11k} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right), a_{82} = \frac{\gamma^2 \cos \psi}{\delta} \sum_{k=1}^m s_k b_{12}^{(k)} t_{2k}, \\
a_{83} &= -\cos \psi \sum_{k=1}^m s_k b_{12}^{(k)} t_{1k}, a_{84} = 2 \sum_{k=1}^m s_k b_{33}^{(k)} t_{1k} \frac{\partial}{\partial \varphi}, a_{85} = -\cos \psi \sum_{k=1}^m s_k b_{12}^{(k)} \bar{r}_{11k}, \\
a_{86} &= 2 \sum_{k=1}^m s_k b_{33}^{(k)} \bar{r}_{21k} \frac{\partial}{\partial \varphi}, a_{92} = -\gamma^2 a_{83}, a_{93} = -\cos \psi \sum_{k=1}^m s_k b_{12}^{(k)} t_{0k}, a_{99} = 1, a_{10,10} = 1, \\
a_{95} &= -\cos \psi \sum_{k=1}^m s_k b_{12}^{(k)} \bar{r}_{10k}, a_{10,2} = -\frac{\gamma^2}{\delta} \sum_{k=1}^m s_k b_{12}^{(k)} t_{1k} \frac{\partial}{\partial \varphi}, a_{10,3} = \sum_{k=1}^m s_k b_{12}^{(k)} t_{0k} \frac{\partial}{\partial \varphi},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
a_{10,5} &= \sum_{k=1}^m s_k b_{12}^{(k)} \bar{r}_{10k} \frac{\partial}{\partial \varphi}, a_{11,2} = \frac{\gamma^2 \sin \psi}{\delta^2} \sum_{k=1}^m s_k (b_{11}^{(k)} \bar{q}_{11k} + \delta \operatorname{ctg} \psi \cdot b_{12}^{(k)} \bar{r}_{11k}), \\
a_{11,3} &= -\frac{\sin \psi}{\delta} \sum_{k=1}^m s_k (b_{11}^{(k)} \bar{q}_{10k} + \delta \operatorname{ctg} \psi \cdot b_{12}^{(k)} \bar{r}_{10k}), a_{11,4} = \sum_{k=1}^m s_k b_{33}^{(k)} \bar{r}_{10k} \frac{\partial}{\partial \varphi}, \\
a_{11,5} &= -\frac{\sin \psi}{\delta} \sum_{k=1}^m s_k (b_{11}^{(k)} q_{11k} + \delta \operatorname{ctg} \psi \cdot b_{12}^{(k)} r_{11k}), a_{11,6} = \sum_{k=1}^m s_k b_{33}^{(k)} r_{21k} \frac{\partial}{\partial \varphi}, a_{11,11} = 1, \\
a_{12,2} &= -\frac{\gamma^2}{\delta} \sum_{k=1}^m s_k b_{12}^{(k)} \bar{r}_{21k} \frac{\partial}{\partial \varphi}, a_{12,3} = \sum_{k=1}^m s_k b_{12}^{(k)} \bar{r}_{20k} \frac{\partial}{\partial \varphi}, a_{12,5} = \sum_{k=1}^m s_k b_{12}^{(k)} r_{12k} \frac{\partial}{\partial \varphi}, \\
a_{12,4} &= -\frac{\sin \psi}{\delta} \sum_{k=1}^m s_k b_{33}^{(k)} (\bar{q}_{20k} - \delta \operatorname{ctg} \psi \cdot \bar{r}_{20k}), \\
a_{12,6} &= -\frac{\sin \psi}{\delta} \sum_{k=1}^m s_k b_{33}^{(k)} (q_{22k} - \delta \operatorname{ctg} \psi \cdot r_{22k}), a_{12,12} = 1. \\
b_{12} &= 1, b_{21} = -\delta(a_{72} + \gamma a_{23}), b_{22} = a_{82}, b_{23} = a_{83}, b_{24} = \frac{\delta \cdot a_{10,2}}{\gamma^2}, b_{25} = -\frac{\delta \cdot a_{11,2}}{\gamma^2}, \\
b_{26} &= \frac{\delta \cdot a_{12,2}}{\gamma^2}, b_{28} = 1, b_{31} = \gamma(\gamma \cdot a_{73} - \delta \cdot a_{33}), b_{32} = -\frac{\gamma^2}{\delta} a_{83}, b_{33} = a_{93}, \\
b_{34} &= -a_{10,3}, b_{35} = a_{11,3}, b_{36} = -a_{12,3}, b_{39} = 1, b_{41} = -\gamma^2 a_{74}, b_{42} = \frac{\gamma^2}{\delta} a_{84}, \\
b_{43} &= -\frac{\delta a_{44}}{\sin \psi} \frac{\partial}{\partial \varphi}, b_{44} = \delta \operatorname{ctg} \psi \cdot a_{44}, b_{45} = -a_{11,4}, b_{46} = a_{12,4}, b_{4,10} = 1, \\
b_{51} &= \gamma(\gamma \cdot a_{75} - \delta \cdot a_{35}), b_{52} = -\frac{\gamma^2}{\delta} a_{85}, b_{53} = a_{95}, b_{54} = -a_{10,5}, b_{55} = a_{11,5}, \\
b_{56} &= -a_{12,5}, b_{5,11} = 1, b_{61} = -\gamma^2 \operatorname{ctg} \psi \cdot a_{86}, b_{62} = \frac{\gamma^2}{\delta} a_{86}, b_{63} = -\frac{\delta a_{46}}{\sin \psi} \frac{\partial}{\partial \varphi}, \\
b_{64} &= \delta \cdot \operatorname{ctg} \psi \cdot a_{46}, b_{65} = -a_{11,6}, b_{66} = a_{12,6}, b_{6,12} = 1, b_{71} = -\frac{\gamma \delta}{\sin \psi} \times
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \times \sum_{k=1}^m s_k \left\{ t_{1k} (b_{12}^{(k)} + 2b_{22}^{(k)}) + \frac{t_{2k}}{\sin^2 \psi} \left(4 \cos^2 \psi \cdot b_{33}^{(k)} - \gamma b_{22}^{(k)} t_{2k} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right) \right\} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + \\
& + \delta \sin \psi \sum_{k=1}^m s_k t_{0k} (b_{12}^{(k)} + 2b_{22}^{(k)}) b_{72} = \frac{\gamma^2 \cos \psi}{\sin^2 \psi} \sum_{k=1}^m s_k t_{2k} (4b_{33}^{(k)} + b_{22}^{(k)}) \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} - \gamma \times \\
& \times \cos \psi \sum_{k=1}^m s_k b_{22}^{(k)} t_{1k}, b_{73} = -\delta \cos \psi \sum_{k=1}^m s_k \left\{ \frac{t_{0k}}{\gamma} b_{22}^{(k)} - \frac{t_{1k}}{\sin^2 \psi} (b_{22}^{(k)} + 2b_{33}^{(k)}) \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right\}, \\
& b_{74} = -\delta \sum_{k=1}^m s_k \left\{ \frac{t_{0k}}{\gamma} b_{22}^{(k)} + \frac{t_{1k}}{\sin^2 \psi} \left(2 \cos^2 \psi \cdot b_{33}^{(k)} - b_{22}^{(k)} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right) \right\} \frac{\partial}{\partial \varphi}, \\
& b_{75} = \frac{1}{\sin \psi} \sum_{k=1}^m s_k \left(\frac{\sin^2 \psi}{\gamma} b_{12}^{(k)} \bar{q}_{10k} - (b_{12}^{(k)} \bar{q}_{11k} + \delta \operatorname{ctg} \psi \cdot \bar{r}_{11k} (b_{22}^{(k)} + 2b_{33}^{(k)})) \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right) + \\
& + \frac{\delta \cos \psi}{\gamma} \sum_{k=1}^m s_k b_{22}^{(k)} \bar{r}_{10k}, b_{79} = \frac{\delta}{\gamma}, b_{76} = \frac{\delta}{\gamma} \sum_{k=1}^m s_k b_{22}^{(k)} \left(\bar{r}_{20k} - \frac{\gamma \cdot \bar{r}_{21k}}{\sin^2 \psi} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right) \frac{\partial}{\partial \varphi} - \\
& - 2 \operatorname{ctg} \psi \sum_{k=1}^m s_k b_{33}^{(k)} (\bar{q}_{21k} - \delta \operatorname{ctg} \psi \cdot \bar{r}_{21k}) \frac{\partial}{\partial \varphi}, b_{81} = \delta \gamma \cos \psi \sum_{k=1}^m s_k t_{1k} (b_{12}^{(k)} + b_{22}^{(k)}) - \\
& - \frac{\delta \gamma^2 \cos \psi}{\sin^2 \psi} \sum_{k=1}^m s_k t_{2k} (4b_{33}^{(k)} + b_{22}^{(k)}) \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}, b_{82} = \gamma^2 \sum_{k=1}^m s_k t_{2k} \left(\frac{4b_{33}^{(k)}}{\sin \psi} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} - \operatorname{ctg} \psi \cdot b_{22}^{(k)} \right), \\
& b_{83} = \frac{\delta \cos^2 \psi}{\sin \psi} \sum_{k=1}^m s_k t_{1k} \left(b_{22}^{(k)} - \frac{2b_{33}^{(k)}}{\cos^2 \psi} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right), b_{84} = \delta \operatorname{ctg} \psi \sum_{k=1}^m s_k t_{1k} (b_{22}^{(k)} + 2b_{33}^{(k)}) \frac{\partial}{\partial \varphi}, \\
& b_{85} = \sum_{k=1}^m s_k \left\{ \cos \psi \cdot b_{12}^{(k)} \bar{q}_{11k} + \frac{\delta \bar{r}_{11k}}{\sin \psi} \left(\cos \psi \cdot b_{22}^{(k)} - 2b_{33}^{(k)} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right) \right\}, \\
& b_{86} = \sum_{k=1}^m s_k \left\{ \delta \operatorname{ctg} \psi \cdot \bar{r}_{21k} (b_{22}^{(k)} + 2b_{33}^{(k)}) - 2b_{33}^{(k)} \bar{q}_{21k} \right\} \frac{\partial}{\partial \varphi}, b_{87} = \delta, \\
& b_{91} = \gamma \delta \cos \psi \sum_{k=1}^m s_k \left\{ t_{0k} (b_{12}^{(k)} + b_{22}^{(k)}) - \frac{\gamma b_{22}^{(k)} t_{1k}}{\sin^2 \psi} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right\}, b_{92} = -\frac{(\gamma \cos \psi)^2}{\sin \psi} \sum_{k=1}^m s_k b_{22}^{(k)} t_{1k},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
b_{93} &= \frac{\delta \cos^2 \psi}{\sin \psi} \sum_{k=1}^m s_k b_{22}^{(k)} t_{0k}, b_{94} = \delta \operatorname{ctg} \psi \sum_{k=1}^m s_k b_{22}^{(k)} t_{0k} \frac{\partial}{\partial \varphi}, b_{9,10} = \frac{-\delta}{\sin \psi} \frac{\partial}{\partial \varphi}, \\
b_{95} &= \cos \psi \sum_{k=1}^m s_k \left(b_{12}^{(k)} \bar{q}_{10k} + \delta \operatorname{ctg} \psi \cdot b_{22}^{(k)} \bar{r}_{10k} \right), b_{96} = \delta \operatorname{ctg} \psi \sum_{k=1}^m s_k b_{22}^{(k)} \bar{r}_{20k} \frac{\partial}{\partial \varphi}, \\
b_{10,1} &= \frac{\gamma^2 \cdot \delta}{\sin^2 \alpha} \sum_{k=1}^m s_k b_{22}^{(k)} t_{1k} \frac{\partial^3}{\partial \varphi^3} - \gamma \delta \sum_{k=1}^m s_k t_{0k} \left(b_{12}^{(k)} + b_{22}^{(k)} \right) \frac{\partial}{\partial \varphi}, \\
b_{10,2} &= -\gamma^2 \operatorname{ctg} \psi \sum_{k=1}^m s_k b_{22}^{(k)} t_{1k} \frac{\partial}{\partial \varphi}, b_{10,3} = -b_{94}, b_{10,4} = -\frac{\delta}{\sin \psi} \sum_{k=1}^m s_k b_{22}^{(k)} t_{0k} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}, \\
b_{10,5} &= -\sum_{k=1}^m s_k \left(\delta \operatorname{ctg} \psi b_{22}^{(k)} \bar{r}_{10k} + b_{12}^{(k)} \bar{q}_{10k} \right) \frac{\partial}{\partial \varphi}, b_{10,6} = -\frac{\delta}{\sin \psi} \sum_{k=1}^m s_k b_{22}^{(k)} \bar{r}_{20k} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}, \\
b_{10,10} &= -\delta \operatorname{ctg} \psi, b_{11,1} = \gamma^2 b_{75} + \gamma \sin \psi \sum_{k=1}^m s_k \left(b_{11}^{(k)} \bar{q}_{10k} + \delta \operatorname{ctg} \psi \cdot b_{12}^{(k)} \bar{r}_{10k} \right), \\
b_{11,2} &= -\frac{\gamma^2}{\delta} b_{85}, b_{11,3} = b_{95} - \frac{a_{11,4}}{\sin \psi} \frac{\partial}{\partial \varphi}, b_{11,4} = \delta \operatorname{ctg} \psi \cdot a_{11,4} - b_{10,5}, b_{11,5} = \frac{\sin \psi}{\delta} \times \\
&\times \sum_{k=1}^m s_k b_{11}^{(k)} \eta_{1k} + 2 \cos \psi \cdot \sum_{k=1}^m s_k \left\{ b_{12}^{(k)} q_{11k} + \frac{\delta \cdot r_{11k}}{\sin 2\psi} \left(\cos^2 \psi \cdot b_{22}^{(k)} - b_{33}^{(k)} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right) \right\} + \\
&+ \frac{(\alpha + 1)^2 \delta \sin \psi}{\gamma^2} \sum_{k=1}^m \frac{t_{\alpha+2,k} - 2t_{\alpha+1,k} + t_{\alpha,k}}{s_k d_{11}^{(k)}}, b_{12,1} = -\gamma (\gamma \cdot b_{76} + \delta \cdot a_{12,3}), \\
b_{11,6} &= \sum_{k=1}^m s_k \left\{ b_{12}^{(k)} q_{12k} - b_{33}^{(k)} q_{21k} + \delta \operatorname{ctg} \psi \cdot r_{12k} \left(b_{22}^{(k)} + b_{33}^{(k)} \right) \right\} \frac{\partial}{\partial \varphi}, b_{12,2} = \frac{\gamma^2}{\delta} b_{86}, \\
b_{12,3} &= -b_{96} - \frac{\delta \cdot a_{12,4}}{\sin \psi} \frac{\partial}{\partial \varphi}, b_{12,4} = b_{10,6} + \delta \cdot \operatorname{ctg} \psi \cdot a_{12,4}, b_{12,5} = -b_{11,6}, \\
b_{12,6} &= \frac{(\alpha + 1)^2 \delta \sin \psi}{\gamma^2} \sum_{k=1}^m \frac{t_{\alpha+2,k} - 2t_{\alpha+1,k} + t_{\alpha,k}}{s_k d_{21}^{(k)}} + \\
&+ \sum_{k=1}^m s_k \left\{ b_{33}^{(k)} \left(\frac{\sin \psi}{\delta} \eta_{2k} - 2 \cos \psi \cdot q_{22k} \right) + \frac{\delta \cdot r_{22k}}{\sin \psi} \left(\cos^2 \psi \cdot b_{33}^{(k)} - b_{22}^{(k)} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right) \right\}.
\end{aligned}$$

Наконец, ненулевые элементы матрицы параметрических членов C :

$$\begin{aligned}
c_{71} &= -\delta \sin \psi \sum_{k=1}^m \bar{\rho}_k \left(t_{0k} - \frac{\gamma^2}{\sin^2 \psi} t_{2k} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right), c_{74} = -\delta \sum_{k=1}^m \bar{\rho}_k t_{1k} \frac{\partial}{\partial \varphi}, \\
c_{76} &= -\delta \sum_{k=1}^m \bar{\rho}_k \bar{r}_{21k} \frac{\partial}{\partial \varphi}, c_{82} = \gamma^2 \sin \psi \sum_{k=1}^m \bar{\rho}_k t_{2k}, c_{83} = -\delta \sin \psi \sum_{k=1}^m \bar{\rho}_k t_{1k}, \\
c_{85} &= -\delta \sin \psi \sum_{k=1}^m \bar{\rho}_k \bar{r}_{11k}, c_{92} = -\gamma^2 c_{83}, c_{93} = -\delta \sin \psi \sum_{k=1}^m \bar{\rho}_k t_{0k}, \\
c_{95} &= -\delta \sin \psi \sum_{k=1}^m \bar{\rho}_k \bar{r}_{10k}, c_{10,1} = -\gamma^2 c_{74}, c_{10,4} = c_{93}, \\
c_{10,6} &= -\delta \sin \psi \sum_{k=1}^m \bar{\rho}_k \bar{r}_{20k}, c_{11,2} = -\frac{\gamma^2}{\delta} c_{85}, c_{11,3} = c_{95}, \\
c_{11,5} &= -\delta \sin \psi \sum_{k=1}^m \bar{\rho}_k \bar{r}_{11k}, c_{12,1} = -\gamma^2 c_{76}, c_{12,4} = c_{10,6}, c_{12,6} = -\delta \sin \psi \sum_{k=1}^m \bar{\rho}_k \bar{r}_{22k}.
\end{aligned}$$

Отметим, что для системы (4.12) остается справедливым предельный переход (1.2.12), в результате которого собственные колебания оболочки определяются без учета сдвиговых деформаций. Матрицы коэффициентов задачи о свободных колебаниях классической теории оболочек получим из матриц A , B , C , повторяя процедуру, описанную в §§ 2.1, 3.1.

Далее решение задачи (4.12) строим, по схеме, реализованной во второй и третьей главах, и изложенной в § 1.4. В результате, переходим к задаче на собственные значения для системы ОДУ вида (1.4.5), где состав множеств I , R , как и ранее определяется (2.18). При аппроксимации (1.4.11) система базисных функций определяется (2.19), (2.20). Таким образом, как и в предыдущих главах, собственные частоты оболочки определяются в результате решения проблемы собственных значений системы линейных алгебраических уравнений порядка $6N$. Количество N , удерживаемых базисных элементов при аппроксимации искомой вектор-функции, достаточ-

ное для корректного расчета начального участка спектра, устанавливалось в результате численного исследования скорости сходимости метода.

4.2. ПАРАМЕТРИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ СОБСТВЕННЫХ ЧАСТОТ И СОБСТВЕННЫХ ФОРМ КОЛЕБАНИЙ СФЕРИЧЕСКОГО ПОЯСА

В этом параграфе обсуждается влияние геометрических, физических и структурных параметров оболочки на значения ее низших частот, а также на степень их зависимости от поперечных сдвиговых деформаций. Все выводы сделаны в результате анализа полученных значений собственных частот, а также погрешности, вносимой в их расчет неучетом сдвиговых деформаций.

Данные, представленные в таблицах 4.1–4.5, получены для двуслойного композитного сферического пояса, первый (внутренний) слой которого армирован в окружном направлении, а второй – в меридиональном. Приняты следующие значения параметров оболочки

— геометрические:

$$\begin{aligned} \psi_2 = \pi/2, \delta = \psi_2 - \psi_1 = \pi/3, R = 1\text{ м}, R/h = 50, \\ h_1 - h_0 = h_2 - h_1 = 0.5h \end{aligned} \quad (4.14)$$

— механические (k – номер слоя):

$$\begin{aligned} E_k^c = 3000\text{ МПа}, E_k^a = 250\text{ ГПа}, \nu_k^c = \nu_k^a = 0.3, \\ \rho_k^c = 1250\text{ кг/м}^3, \rho_k^a = 1710\text{ кг/м}^3 \end{aligned} \quad (4.15)$$

— структурные:

$$\omega_{l,1} = \omega_{l,2}|_{x=0} = \omega_{z1} = \omega_{z2} = 0.5, \omega_{l,2} = (\sin\psi_1 / \sin\psi) \cdot \omega_{l,2}|_{x=0}. \quad (4.16)$$

Отметим, что интенсивность меридионально армированного слоя $\omega_{l,2}$ в (4.16) определяется по (1.1.6) при $\omega_0 = \omega_{l,2}|_{x=0}$ и $L_0 = 2\pi R \cdot \sin\psi_1$, $L_* = 2\pi R \cdot \sin\psi$ или с учетом (4.1) $L_* = 2\pi R \cdot \sin(\psi_1 + s/R)$.

Если не оговаривается противное, то параметр окружного волнообразования $n = 2$, а функция распределения поперечных деформаций $f(z)$ принята в виде (1.2.3). Расчеты, представленные в таблицах 4.1–4.3, выполнены при краевых условиях (4.10), т. е. торец Γ_1 закреплен жестко, а Γ_2 – свободен от усилий.

4.2.1. ОЦЕНКА СКОРОСТИ СХОДИМОСТИ ЧИСЛЕННОГО РАСЧЕТА НИЗШИХ СОБСТВЕННЫХ ЧАСТОТ ОТНОСИТЕЛЬНО ЧИСЛА АППРОКСИМИРУЮЩИХ БАЗИСНЫХ ВЕКТОРОВ

Данные, приведенные в таблице 4.1, отражают исследование скорости сходимости метода относительно параметра N . Из них видно, что приближение к точным значениям собственных частот происходит сверху. Стабилизация вычисления трех низших частот достигается при $N = 8$, четвертой – при $N = 10$, пятой и шестой – при $N = 12$.

Таблица 4.1

| Оценка скорости сходимости относительно параметра N ($n = 2$), Гц | | | | | | |
|---|------------|------------|------------|------------|------------|------------|
| N | ω_0 | ω_1 | ω_2 | ω_3 | ω_4 | ω_5 |
| 4 | 172.8 | 1736 | 2543 | 4794 | 6513 | 9589 |
| 6 | 172.8 | 1732 | 2434 | 3303 | 4296 | 5475 |
| 8 | 172.8 | 1731 | 2423 | 3188 | 3963 | 5176 |
| 10 | 172.8 | 1731 | 2423 | 3186 | 3936 | 4852 |
| 12 | 172.8 | 1731 | 2423 | 3186 | 3935 | 4812 |
| 14 | 172.8 | 1731 | 2423 | 3186 | 3935 | 4811 |
| 18 | 172.8 | 1731 | 2423 | 3186 | 3935 | 4811 |

Расчеты, выполненные автором, показали, что полученные значения параметра N типичны, и не зависят ни от значения параметра n , ни от характеристик оболочки, ни от условий закрепления торцов. Это позволило во всех дальнейших расчетах принять $N = 12$. Отметим, что полученная оценка скорости сходимости метода согласуется с оценками, проведенными для цилиндрической (§ 2.2.1) и конической оболочек (§ 3.2.1).

4.2.2. ВЛИЯНИЕ ПАРАМЕТРА ОКРУЖНОГО ВОЛНООБРАЗОВАНИЯ

В таблице 4.2 и на рисунке 4.2 отражена зависимость низших собственных частот и степени влияния на них поперечных сдвигов от параметра n . Из этих данных следует, что в рассматриваемом случае

1. Все вычисленные низшие частоты как функции параметра n (рис. 4.2) имеют минимумы. Это давно установленный и неоднократно подтвержденный факт [30, 67, 287, 289, 290, 384 и другие].

2. Значимость поперечных деформаций при вычислении собственных частот усиливается с увеличением параметра n (табл. 4.2).

Отметим, что эти же тенденции имеют место для цилиндрической (§ 2.2.3) и усеченной конической (§ 3.2.3) оболочек.

Таблица 4.2

| Зависимость низших собственных частот сферического пояса от параметра волнообразования n , Гц | | | | | | | | | | | | | | |
|---|------------|------------|------------|------------|----------------------|------------|------------|------------|---------------------------------|-------|-------|-------|-------|-------|
| теория Андреева-Немировского | | | | | теория Кирхгофа-Лява | | | | погрешность от неучета сдвига % | | | | | |
| n | ω_0 | ω_1 | ω_2 | ω_3 | ω_0 | ω_1 | ω_2 | ω_3 | p_0 | p_1 | p_2 | p_3 | p_4 | p_5 |
| 0 | 848 | 2138 | 3860 | 3968 | 848 | 2146 | 3860 | 3971 | 0 | 0.4 | 0 | 0.1 | 0 | 0.2 |
| 2 | 173 | 1731 | 2423 | 3186 | 174 | 1734 | 2431 | 3202 | 0.6 | 0.2 | 0.3 | 0.5 | 1 | 1.6 |
| 4 | 264 | 1797 | 1875 | 2609 | 266 | 1799 | 1881 | 2627 | 0.5 | 0.1 | 0.3 | 0.7 | 1.4 | 2.3 |
| 6 | 621 | 1852 | 2074 | 2638 | 625 | 1857 | 2082 | 2654 | 0.8 | 0.3 | 0.4 | 0.6 | 1.7 | 2.7 |
| 8 | 1086 | 2116 | 2395 | 2981 | 1097 | 2125 | 2414 | 3009 | 1 | 0.4 | 0.8 | 0.9 | 1.8 | 2.9 |

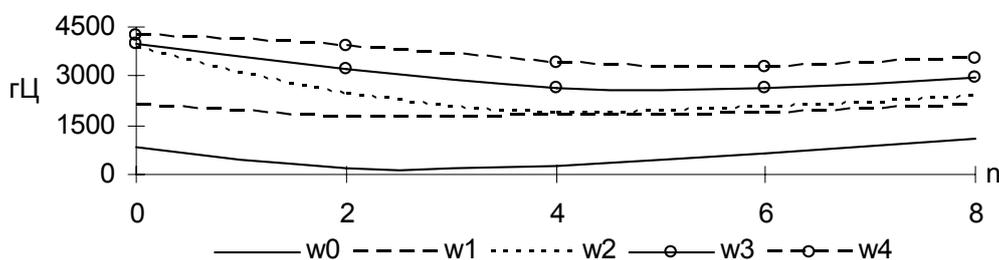


Рис. 4.2. Низшие собственные частоты ω_0 – ω_4 как функции параметра n .

4.2.3. ФОРМЫ СОБСТВЕННЫХ КОЛЕБАНИЙ СФЕРИЧЕСКОГО ПОЯСА

На рисунках 4.3, 4.4 представлены осесимметричные формы собственных колебаний сферического пояса. Отметим, что число обращений в нуль каждой из собственных форм равно порядковому номеру собственной частоты.

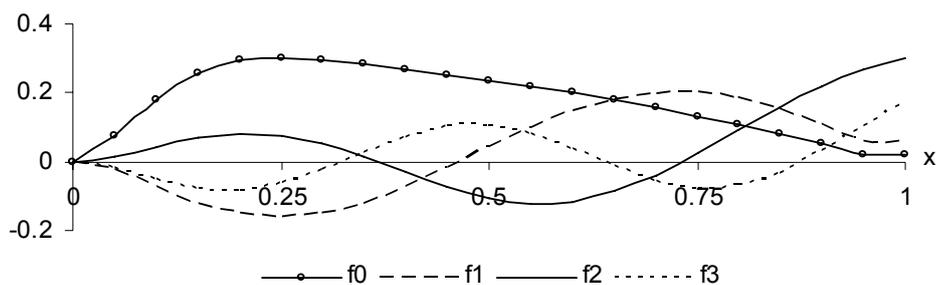


Рис. 4.3. Осесимметричные изгибные формы колебаний f_0 – f_3 , соответствующие частотам ω_0 – ω_3 сферического пояса типа (4.10). Плоскость $(x, 50w)$

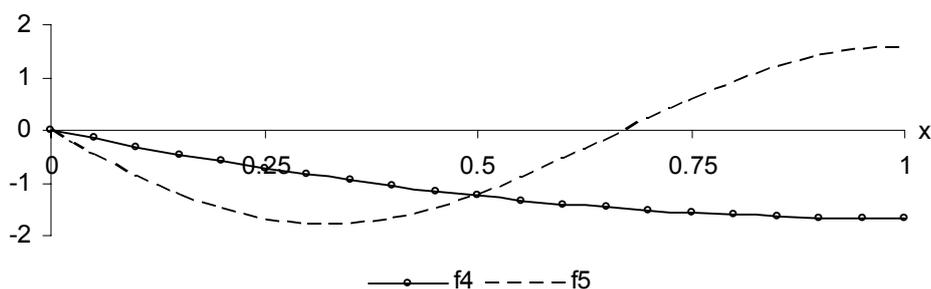


Рис. 4.4. Осесимметричные крутильные формы колебаний f_4 – f_5 , соответствующие частотам ω_4 – ω_5 сферического пояса типа (4.10). Плоскость (x, u_φ)

Сравнивая типы осесимметричных форм, соответствующих сферическому поясу (рис. 4.3, 4.4), с типами форм, соответствующих цилиндрической оболочке (рис. 2.5–2.7, табл. 2.4 в § 2.2.2), утверждается (косвенно) их зависимость от профиля оболочки. Так, для сферического пояса при $n = 0$ частотам ω_0 – ω_3 соответствуют изгибные (рис. 4.3), а ω_4 , ω_5 – крутильные формы (рис. 4.4), что не совпадает с типами форм цилиндрической оболочки (табл. 2.4).

На рисунке 4.5 представлены собственные формы, полученные при $n = 2$. Все они являются преимущественно изгибными. Эти данные также, как и формы, представленные для цилиндрической оболочки (рис. 2.4), подтверждают, что типы неосесимметричных форм не зависят от профиля оболочки, являясь преимущественно изгибными (рис. 2.4; рис. 4.5). Аналогичный результат был отмечен, например, в [67].

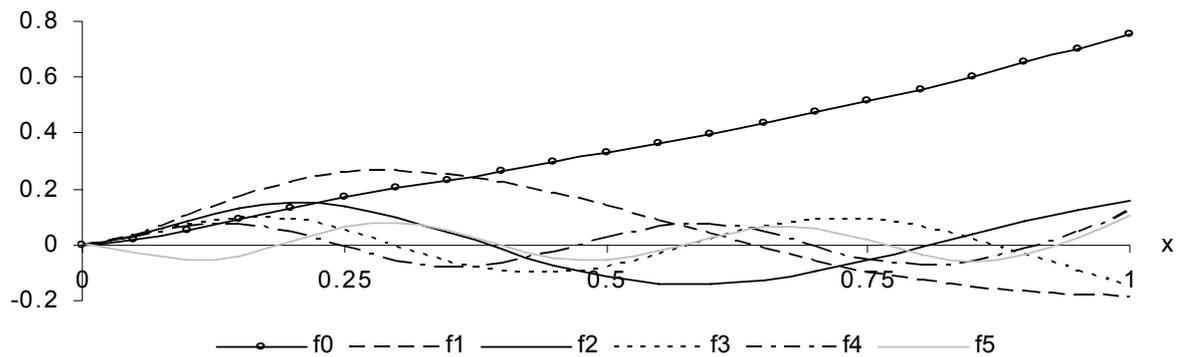


Рис. 4.5. Изгибные формы f_0 – f_5 , соответствующие частотам ω_0 – ω_5 при $n = 2$. Плоскость $(x, 50w)$

4.2.4. ВЛИЯНИЕ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИК НА ЗНАЧЕНИЯ СОБСТВЕННЫХ ЧАСТОТ, А ТАКЖЕ НА СТЕПЕНЬ ИХ ЗАВИСИМОСТИ ОТ ПОПЕРЕЧНОГО СДВИГА

4.2.4.1. ВАРЬИРОВАНИЕ ОТНОСИТЕЛЬНОЙ ТОЛЩИНЫ

В таблице 4.3 представлены результаты исследования сферического пояса консольного типа (4.10) при параметрах (4.14)–(4.16). На основе полученных данных сделаны следующие выводы:

1. Значение каждой из низших частот, как и значимость сдвиговых деформаций, возрастает по мере увеличения относительной толщины оболочки, т.е. при уменьшении параметра R/h . Те же тенденции были отмечены для рассматриваемых ранее оболочек (§§ 2.2.4.1, 3.2.4.1).

2. Для сферического пояса (4.10) учет поперечных деформаций на

первых гармониках ($n \leq 2$) малозначим. Действительно, даже для относительно «толстых» оболочек, с параметром $R/h = 20$, погрешность от неучета сдвига составляет менее 9%.

Таблица 4.3

| Зависимость частот от параметра R/h для оболочки типа (4.10), Гц | | | | | | | | | |
|--|------------------------------|------------|----------------------|------------|--|-------|-------|-------|-------|
| R/h | теория Андреева-Немировского | | теория Кирхгофа-Лява | | погрешность, вносимая неучетом сдвига, % | | | | |
| | ω_0 | ω_1 | ω_0 | ω_1 | p_0 | p_1 | p_3 | p_4 | p_5 |
| $n=0$ | | | | | | | | | |
| 20 | 847.4 | 2239 | 847.4 | 2275 | 0 | 1.6 | 2.3 | 2.9 | 3.4 |
| 30 | 847.4 | 2190 | 847.4 | 2210 | 0 | 0.9 | 1.2 | 1.2 | 1.5 |
| 50 | 847.4 | 2138 | 847.4 | 2146 | 0 | 0.4 | 0.7 | 0.8 | 0.8 |
| 60 | 847.4 | 2121 | 847.4 | 2128 | 0 | 0.3 | 0.3 | 0.4 | 0.3 |
| 80 | 847.4 | 2098 | 847.4 | 2102 | 0 | 0.2 | 0 | 0 | 0 |
| 100 | 847.4 | 2082 | 847.4 | 2085 | 0 | 0.1 | 0 | 0 | 0 |
| $n=2$ | | | | | | | | | |
| 20 | 244 | 1860 | 249 | 1892 | 1.9 | 1.7 | 2.5 | 4.6 | 8.5 |
| 30 | 202 | 1781 | 206 | 1800 | 1.6 | 1.1 | 1.2 | 1.9 | 1.2 |
| 50 | 172 | 1731 | 174 | 1740 | 1.1 | 0.5 | 0.6 | 0.5 | 1.6 |
| 60 | 165 | 1718 | 167 | 1720 | 1 | 0.1 | 0.4 | 0.3 | 1.1 |
| 80 | 157 | 1702 | 159 | 1703 | 0.8 | 0.1 | 0.4 | 0.2 | 0.5 |
| 100 | 152 | 1694 | 154 | 1694 | 0.3 | 0 | 0.1 | 0.1 | 0.2 |

4.2.4.2. ВАРЬИРОВАНИЕ ОТНОСИТЕЛЬНОЙ ДЛИНЫ

В таблице 4.4 и на рисунках 4.6–4.7 представлены результаты, иллюстрирующие зависимость низших частот от параметра $l/R = (\psi_2 - \psi_1)$, где l – длина меридиональной дуги оболочки; ψ_1, ψ_2 – углы раствора конических поверхностей, вырезающих рассматриваемый сферический пояс (рис. 4.1). Варьировался угол ψ_1 , т. е. меньший угол раствора конуса; больший угол $\psi_2 = \pi/2$. Исследовались случаи с параметром $n = 0$ (рис. 4.7) и $n = 4$ (рис. 4.6).

Расчеты проведены для трехслойного жестко защемленного сферического пояса (4.9), строение которого симметрично относительно срединной поверхности. Несущие слои армированы вдоль меридианов, армирование среднего слоя окружное. Физико-механические параметры оболочки

определялись формулами (4.15), (4.16), неизменяемые геометрические параметры приняты в виде ($k = 1, 2, 3$ – номер слоя)

$$R/h = 40, h_k - h_{k-1} = h/3. \quad (4.17)$$

Анализируя полученные значения частот, а также погрешности их вычисления, вносимые неучетом сдвиговых деформаций, приходим к следующим выводам:

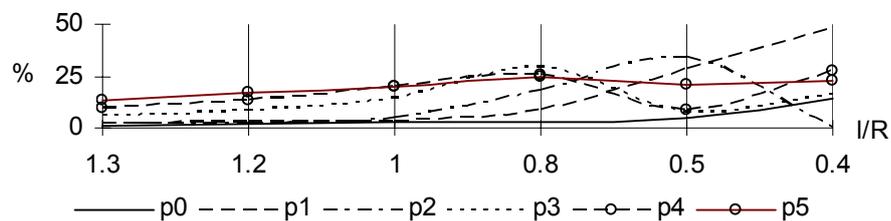
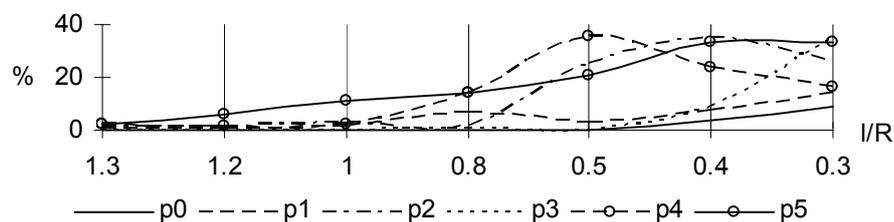
1. Значения низших собственных частот возрастают при увеличении угла ψ_1 , что соответствует уменьшению относительной длины l/R . Аналогичные закономерности были отмечены для цилиндрической (§ 2.2.4.2, табл. 2.7) и конической (§ 3.2.4.2, табл. 3.4) оболочек.

2. Значимость сдвиговых деформаций усиливается при уменьшении относительной длины. Так, соответствующая погрешность монотонно растет при убывании параметра l/R , достигая 30% при $n = 4$ и 15% при $n = 0$. Для «коротких» оболочек, с параметром $l/R \leq 0.5$, поведение погрешности возрастает, достигая максимума 45%, а затем незначительно уменьшается. Аналогичная тенденция наблюдалась при изучении влияния сдвига в цилиндрических (§ 2.2.4.2, рис. 2.12–2.14) и конических (§ 3.2.4.2, рис. 3.11, 3.12) оболочках.

Косвенное сравнение данных, приведенных в таблицах 4.3, 4.4, а также учет результатов, полученных во второй и третьей главах, дает основание считать, что в оболочках с жестко защемленными кромочными поверхностями влияние сдвиговых деформаций сильнее, чем при свободном опирании хотя бы одной их поверхностей.

Таблица 4.4

| Зависимость собственных частот жестко заземленного пояса от параметра l/R , Гц | | | | | | | | | | | | |
|--|----------|------------------------------|------------|------------|----------------------|------------|------------|----------------------------------|-------|-------|-------|-------|
| $n = 0$ | | теория Андреева-Немировского | | | теория Кирхгофа-Лява | | | погрешность от неучета сдвига, % | | | | |
| l/R | ψ_1 | ω_0 | ω_1 | ω_2 | ω_0 | ω_1 | ω_2 | p_0 | p_1 | p_2 | p_4 | p_5 |
| 1.3 | $\pi/10$ | 242 | 385 | 462 | 242 | 388 | 468 | 0 | 1 | 1 | 2 | 2 |
| 1.2 | $\pi/8$ | 260 | 405 | 483 | 260 | 409 | 492 | 0 | 1 | 2 | 2 | 6 |
| 1 | $\pi/6$ | 298 | 439 | 524 | 298 | 446 | 538 | 0 | 2 | 3 | 2 | 11 |
| 0.8 | $\pi/4$ | 417 | 554 | 614 | 417 | 591 | 623 | 0 | 7 | 2 | 14 | 14 |
| 0.5 | $\pi/3$ | 650 | 717 | 892 | 650 | 739 | 1119 | 0 | 3 | 25 | 36 | 21 |
| 0.4 | $3\pi/8$ | 847 | 880 | 1312 | 880 | 943 | 1773 | 4 | 7 | 35 | 24 | 33 |
| 0.3 | 0.4π | 1017 | 1107 | 1768 | 1107 | 1265 | 2226 | 9 | 14 | 26 | 16 | 33 |
| $n = 4$ | | ω_0 | ω_1 | ω_2 | ω_0 | ω_1 | ω_2 | p_0 | p_1 | p_2 | p_4 | p_5 |
| 1.3 | $\pi/10$ | 236 | 277 | 394 | 238 | 283 | 400 | 1 | 2 | 1 | 9 | 14 |
| 1.2 | $\pi/8$ | 253 | 306 | 435 | 257 | 314 | 444 | 2 | 3 | 2 | 13 | 17 |
| 1 | $\pi/6$ | 294 | 357 | 511 | 303 | 367 | 537 | 3 | 3 | 5 | 19 | 20 |
| 0.8 | $\pi/4$ | 443 | 460 | 781 | 456 | 499 | 919 | 3 | 9 | 18 | 26 | 25 |
| 0.5 | $\pi/3$ | 585 | 847 | 1432 | 612 | 1084 | 1923 | 5 | 28 | 34 | 8 | 21 |
| 0.4 | $3\pi/8$ | 748 | 1293 | 1988 | 855 | 1917 | 1996 | 14 | 48 | 1 | 28 | 22 |
| 0.3 | 0.4π | 944 | 1763 | 2090 | 1205 | 2094 | 2813 | 28 | 20 | 35 | 30 | 27 |

Рис. 4.6. Погрешности p_0 – p_5 расчетных значений частот ω_0 – ω_5 жестко заземленного пояса, обусловленные неучетом сдвига, при $n = 4$.Рис. 4.7. Погрешности p_0 – p_5 расчетных значений частот ω_0 – ω_5 жестко заземленного пояса, обусловленные неучетом сдвига, при $n = 0$.

4.2.5. ВЛИЯНИЕ ЖЕСТКОСТНЫХ ХАРАКТЕРИСТИК КОМПОНЕНТОВ КОМПОЗИТА

В этом параграфе изучалась зависимость расчетных значений низших собственных частот от жесткостных характеристик слоев симметричного относительно срединной поверхности трехслойного сферического пояса. Результаты исследования представлены на рисунках 4.8–4.13. Расчеты проводились при $n = 2$.

Рассматривалась жестко заземленная оболочка, несущие слои которой армированы вдоль меридианов, а заполнитель – вдоль окружностей с интенсивностью (4.16). Во всех слоях использован один и тот же армирующий (связующий) материал, поэтому ниже использовано обозначение $E^a = E_k^a$, $E^c = E_k^c$. Варьировался параметр $E = E^a/E^c$ при геометрических параметрах (4.14) за исключением $R/h = 20$ и угла ψ_1 , значения которого следующие:

$$\psi_1 = \pi/6, \text{ т. е. } l/R \cong 1 \text{ (рис. 4.8, 4.11),}$$

$$\psi_1 = \pi/4, \text{ т. е. } l/R \cong 0.8 \text{ (рис. 4.9, 4.12),}$$

$$\psi_1 = \pi/3, \text{ т. е. } l/R \cong 0.5 \text{ (рис. 4.10, 4.13).}$$

На основе полученных данных сделаны следующие выводы:

1. Независимо от относительной длины меридиана сферического пояса значения всех низших частот убывают по мере увеличения параметра E (рис. 4.8–4.10), а значение погрешности, вносимой неучетом сдвига увеличивается (рис. 4.11–4.13).

2. Для оболочек со значением параметра $l/R \neq 0.5$ наблюдается монотонный рост погрешности, который при $l/R = 1$ достигает 30% (рис. 4.11), при $l/R = 0.8$ – 40% (рис. 4.12). Для сферического пояса с $l/R = 0.5$ погрешность превышает 40% (рис. 4.13), однако, достигая 44% при $E = 50$, проис-

ходит некоторая стабилизация на уровне 33% в области параметра $E > 50$. Таким образом, при увеличении E погрешность сохраняется на уровне $30\% \pm 3\%$ независимо от относительной длины пояса.

Подводя итог сказанному выше, констатируем, что увеличение жесткости армирующего, по сравнению со связующим, приводит к усилению влияния сдвиговых деформаций.

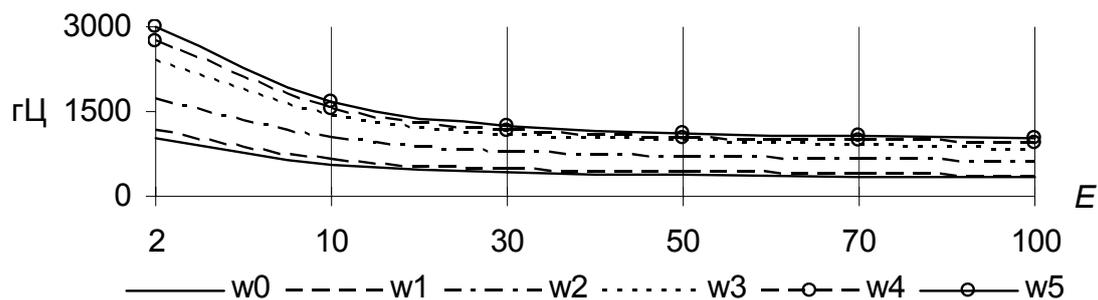


Рис. 4.8. Значения частот $\omega_0-\omega_5$ жестко защемленного пояса как функций параметра $E = E^a/E^c$ при $R/h = 20$, $l/R = 1$, $\psi_1 = \pi/6$, $\psi_2 = \pi/2$.

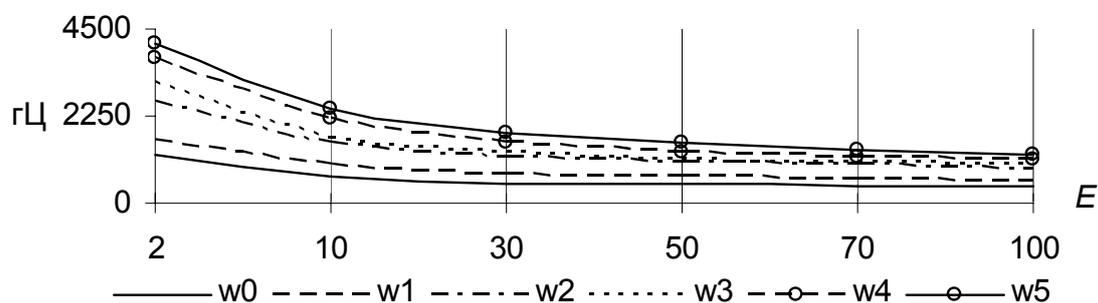


Рис. 4.9. Значения частот $\omega_0-\omega_5$ жестко защемленного пояса как функций параметра $E = E^a/E^c$ при $R/h = 20$, $l/R = 0.8$, $\psi_1 = \pi/4$, $\psi_2 = \pi/2$.

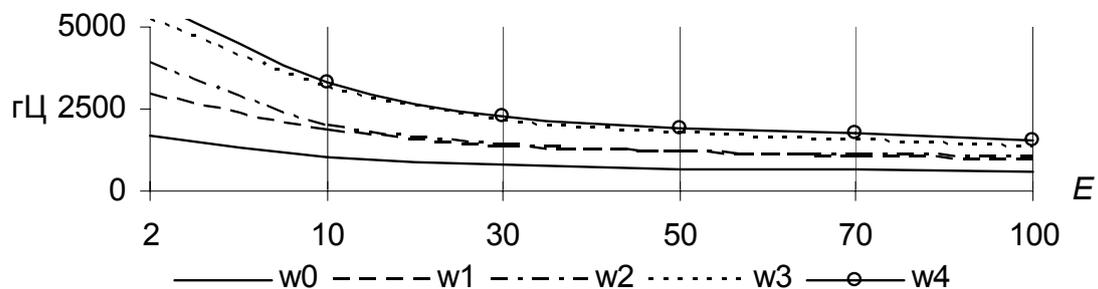


Рис. 4.10. Значения частот $\omega_0-\omega_5$ жестко защемленного пояса как функций параметра $E = E^a/E^c$ при $R/h = 20$, $l/R = 0.5$, $\psi_1 = \pi/3$, $\psi_2 = \pi/2$.

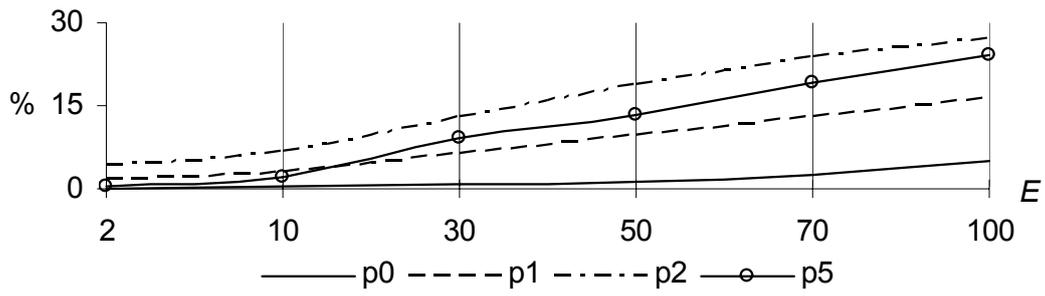


Рис. 4.11. Погрешности p_0 – p_5 расчетных значений частот ω_0 – ω_5 , вносимые неучетом сдвига, как функций параметра $E = E^a/E^c$ при $R/h = 20$, $l/R = 1$, $\psi_1 = \pi/6$, $\psi_2 = \pi/2$.

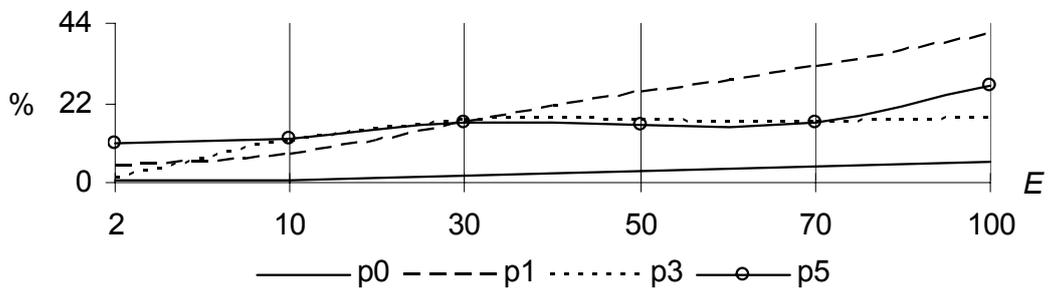


Рис. 4.12. Погрешности p_0 – p_5 расчетных значений частот ω_0 – ω_5 , вносимые неучетом сдвига, как функций параметра $E = E^a/E^c$ при $R/h = 20$, $l/R = 0.8$, $\psi_1 = \pi/4$, $\psi_2 = \pi/2$.

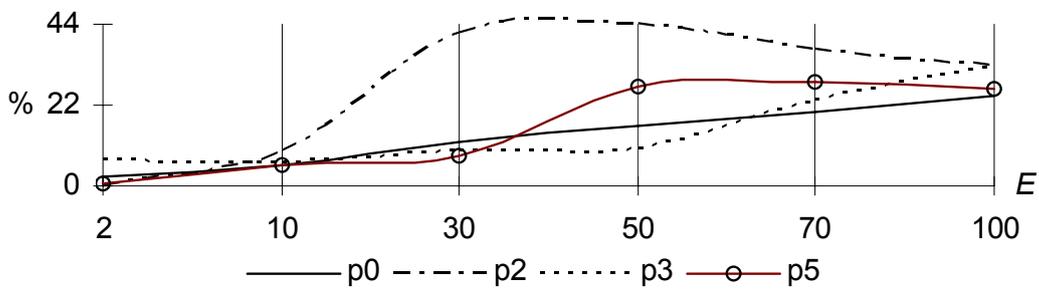


Рис. 4.13. Погрешности p_0 – p_5 расчетных значений частот ω_0 – ω_5 , вносимые неучетом сдвига, как функций параметра $E = E^a/E^c$ при $R/h = 20$, $l/R = 0.5$, $\psi_1 = \pi/3$, $\psi_2 = \pi/2$.

4.2.6. ВЛИЯНИЕ ВЫБОРА ЗАКОНА РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ПОПЕРЕЧНЫХ ДЕФОРМАЦИЙ ПО ТОЛЩИНЕ ПАКЕТА НА НИЖНИЙ УЧАСТОК СПЕКТРА ОБОЛОЧКИ

В этом параграфе изучается зависимость расчетных значений низших собственных частот сферического пояса от априорного закона распределения сдвиговых деформаций по толщине пакета. Расчеты проводились при $n = 0$ или $n = 4$.

Рассматривался жестко заземленный (4.9) трехслойный сферический пояс с характеристиками (4.15)–(4.17) симметричный относительно срединной поверхности. Внешние слои армированы вдоль меридианов, внутренний – вдоль широт. Функция распределения поперечных деформаций принята в виде (1.2.2) (α – параметр):

$$f(z) = z^{\alpha+1} - (1 + \alpha^{-1}) h z^{\alpha}.$$

В таблице 4.5 представлены результаты варьирования параметра α , на основе которых сделаны следующие выводы:

1. Увеличение параметра α приводит к увеличению значений собственных частот ω_0 – ω_5 . Этот рост тем заметнее, чем «короче» оболочка.
2. Следствием первого пункта будет уменьшение значения погрешности, вносимой в расчетные значения низших частот неучетом поперечных деформаций. Таким образом, влияние сдвига наиболее значимо при априорном предположении о параболическом законе распределения сдвиговых деформаций по толщине пакета (по сравнению с использованием двучленов 3-ей и 4-ой степени). Это обстоятельство свидетельствует в пользу выбора именно параболического закона, что отмечалось в монографии [30].
3. Зафиксированный рост частот для оболочек с $l/R \geq 1$ незначителен и составляет при $n = 0$ не более 3%, при $n = 4$ – менее 8%. Для оболочек со

значением $l/R \leq 0.5$ изменение частот достигает 15%. В силу этого, можно считать, что и при $n \leq 4$, для оболочек со значением $l/R > 0.5$ выбор в законе распределения поперечных сдвиговых деформаций по толщине пакета параметра $\alpha = 2$, по сравнению со значениями $\alpha = 3$ или $\alpha = 4$, не вносит в расчет низших собственных частот недопустимых погрешностей.

Таблица 4.5

| Погрешности p_0 – p_5 расчетных значений низших собственных частот, вносимые не- учетом сдвига, как функции параметров α и l/R , % | | | | | | | | | | | | |
|--|---|-------|-------|-------|-------|-------|---|-------|-------|-------|-------|-------|
| $n=4$ | $l/R = 1.2, \psi_1 = \pi/8, \psi_2 = \pi/2$ | | | | | | $l/R = 1, \psi_1 = \pi/6, \psi_2 = \pi/2$ | | | | | |
| $\alpha \setminus p_k$ | p_0 | p_1 | p_2 | p_3 | p_4 | p_5 | p_0 | p_1 | p_2 | p_3 | p_4 | p_5 |
| 2 | 2 | 3 | 2 | 9 | 13 | 17 | 3 | 3 | 5 | 14 | 19 | 20 |
| 3 | 1 | 2 | 2 | 8 | 11 | 15 | 3 | 3 | 5 | 12 | 18 | 17 |
| 4 | 1 | 2 | 2 | 6 | 9 | 12 | 2 | 2 | 4 | 10 | 14 | 13 |
| Δp_k | 1 | 1 | 0 | 3 | 4 | 5 | 1 | 1 | 1 | 4 | 5 | 7 |
| $n=4$ | $l/R = 0.5, \psi_1 = \pi/3, \psi_2 = \pi/2$ | | | | | | $l/R = 0.3, \psi_1 = 4\pi/10, \psi_2 = \pi/2$ | | | | | |
| $\alpha \setminus p_k$ | p_0 | p_1 | p_2 | p_3 | p_4 | p_5 | p_0 | p_1 | p_2 | p_3 | p_4 | p_5 |
| 2 | 5 | 28 | 34 | 8 | 8 | 21 | 28 | 19 | 35 | 6 | 30 | 27 |
| 3 | 4 | 25 | 30 | 8 | 4 | 21 | 25 | 14 | 35 | 7 | 24 | 27 |
| 4 | 4 | 21 | 24 | 8 | 0 | 18 | 21 | 7 | 35 | 7 | 14 | 27 |
| Δp_k | 1 | 7 | 10 | 5 | 8 | 3 | 7 | 12 | 0 | 1 | 16 | 0 |
| $n=0$ | $l/R = 1.2, \psi_1 = \pi/8, \psi_2 = \pi/2$ | | | | | | $l/R = 1, \psi_1 = \pi/6, \psi_2 = \pi/2$ | | | | | |
| $\alpha \setminus p_k$ | p_0 | p_1 | p_2 | p_3 | p_4 | p_5 | p_0 | p_1 | p_2 | p_3 | p_4 | p_5 |
| 2 | 0 | 1 | 2 | 0 | 1 | 6 | 0 | 2 | 3 | 0 | 2 | 11 |
| 3 | 0 | 1 | 2 | 0 | 1 | 5 | 0 | 2 | 2 | 0 | 2 | 10 |
| 4 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 4 | 0 | 1 | 2 | 0 | 2 | 8 |
| Δp_k | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 2 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 3 |
| $n=0$ | $l/R = 0.5, \psi_1 = \pi/3, \psi_2 = \pi/2$ | | | | | | $l/R = 0.3, \psi_1 = 4\pi/10, \psi_2 = \pi/2$ | | | | | |
| $\alpha \setminus p_k$ | p_0 | p_1 | p_2 | p_3 | p_4 | p_5 | p_0 | p_1 | p_2 | p_3 | p_4 | p_5 |
| 2 | 0 | 3 | 25 | 0 | 36 | 21 | 9 | 14 | 26 | 35 | 16 | 33 |
| 3 | 0 | 3 | 23 | 0 | 32 | 21 | 7 | 14 | 20 | 35 | 10 | 33 |
| 4 | 0 | 2 | 19 | 0 | 26 | 21 | 4 | 14 | 13 | 35 | 2 | 33 |
| Δp_k | 0 | 1 | 6 | 0 | 10 | 0 | 5 | 0 | 13 | 0 | 14 | 0 |

ГЛАВА 5. СВОБОДНЫЕ КОЛЕБАНИЯ МНОГОСЛОЙНОЙ СОСТАВНОЙ ОБОЛОЧКИ ВРАЩЕНИЯ

В этой главе решается проблема свободных гармонических колебаний тонкостенной слоистой упругой композитной составной оболочки вращения. Приведены результаты параметрического исследования низших собственных частот и собственных форм оболочки, полученной сопряжением цилиндрической и сферической частей. Дана численная оценка значимости сдвиговых деформаций при расчете собственных частот. Исследовано влияние положения поверхности сопряжения на формы собственных колебаний.

5.1. ПОСТАНОВКА И МЕТОД РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ

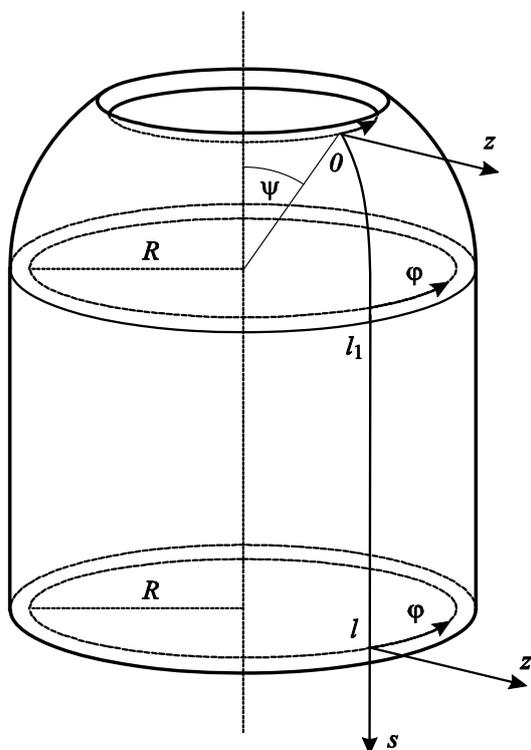


Рис. 5.1. Составная оболочка вращения и связанная с ее поверхностью система координат.

Рассмотрим многослойную оболочку вращения толщины h , собранную из m армированных ортотропных слоев постоянной толщины. В качестве поверхности приведения примем нижнюю (внутреннюю) лицевую поверхность оболочки (рис. 5.1). Считаем меридиан поверхности приведения гладкой кривой класса C^1 кусочно-непрерывной кривизны. Пусть меридиан отнесен к натуральному параметру длины дуги s ($0 \leq s \leq l$), φ – угловая координата ($0 \leq \varphi \leq 2\pi$), z – нормальная координата ($0 \leq z$

$\leq h$), отсчитываемая от поверхности приведения. Параметры Ламе A_1, A_2 и радиусы кривизны R_1, R_2 поверхности приведения терпят разрыв первого рода на кривых

$$s = l_i, i = 1, \dots, r, \text{ где } l_1 < l_2 < \dots < l_r \quad (5.1)$$

где $(r + 1)$ – количество сопрягаемых поверхностей, l_i – длина образующей i -ой поверхности сопряжения. Тогда длина образующей l составной оболочки определится в виде

$$l = l_1 + l_2 + \dots + l_r + l_{r+1}. \quad (5.2)$$

В силу (5.1) коэффициенты системы уравнений свободных колебаний (1.2.14)–(1.2.20) составной многослойной оболочки являются кусочно-непрерывными функциями, имеющими r точек разрыва 1-го рода. Это приводит к решению многоточечной краевой задачи. Следовательно, краевые условия (1.2.21) следует дополнить требованиями непрерывности вектора решения при переходе через линии (5.1). Последнее обстоятельство, не нарушая идейных основ метода решения задачи о свободных колебаниях (см. § 1.4), потребовало некоторой технической модификации метода инвариантного погружения § 1.3. Она заключается, в обязательном включении всех точек сопряжения, в узлы разбиения (1.3.16).

В качестве примера, рассмотрим составную оболочку, полученную в результате сопряжения сферического пояса и цилиндрической оболочки радиусов R (рис. 5.1). Сопряжение выполнено по диаметральному сечению сферы. Длину меридиана s будем отсчитывать от края сферического пояса ($s = 0$). Поскольку сопрягаются всего две поверхности, то в (5.1) $r = 1$, следовательно, одна кривая сопряжения $s = l_1$, причем $l_1 = R \cdot (\pi/2 - \psi_1)$, так как $\psi_2 = \pi/2$ (рис. 4.1). Геометрические характеристики гауссовой системы координат s, φ с учетом (2.1), (4.1) определяются следующими функциями:

$$A_1 = 1, A_2 = \begin{cases} R \sin(\psi_1 + s/R), & 0 \leq s \leq l_1 \\ R, & l_1 < s \leq l_2 \end{cases}, R_1 = \begin{cases} R, & 0 \leq s \leq l_1 \\ \infty, & l_1 < s \leq l_2 \end{cases}, R_2 = R. \quad (5.3)$$

Система свободных колебаний (1.2.14)–(1.2.20) сопряженной многослойной оболочки типа (5.3) состоит из соотношений, соответствующих сферической ($s \in [0, l_1]$) и цилиндрической ($s \in (l_1, l]$) частям. Следовательно, система имеет следующие вид:

$$(4.2)–(4.7) \text{ при } s \in [0, l_1] \text{ (см. § 4.1),} \quad (5.4)$$

$$(2.2)–(2.7) \text{ при } s \in (l_1, l] \text{ (см. § 2.1).} \quad (5.5)$$

Здесь и всюду в дальнейшем, функция $f(z)$ принималась в виде (1.2.3), что соответствует параболическому закону распределения поперечных сдвиговых деформаций по толщине пакета.

Система (5.4), (5.9) замыкается однородными краевыми условиями, альтернативно выбираемыми из пар (1.2.25), а также условиями непрерывности при переходе через кривую сопряжения $s = l_1$:

$$f_I(l_1 - 0, \varphi) = f_I(l_1 + 0, \varphi), \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi$$

и условиям 2π -периодичности по угловой координате φ :

$$f_I(s, \varphi) = f_I(s, \varphi + 2\pi), \quad 0 \leq s \leq l,$$

где под функцией $f_I(s, \varphi)$ следует поочередно понимать все кинематические и силовые характеристики НДС оболочки, составляющие пары (1.2.25). Ниже рассматривалось два типа закрепления кромочных поверхностей оболочки:

1) жестко заземленная, т. е. на поверхностях $s = 0$ и $s = l$ обращаются в нуль компоненты обобщенного вектора перемещения:

$$u_s = u_\varphi = \widehat{\partial w / \partial s} = \pi_s = \pi_\varphi = w = 0. \quad (5.6a)$$

2) жестко заземленная граничная поверхность $s = 0$ и свободная от нагрузок поверхность $s = l$:

при $s = 0$:
$$u_s = u_\varphi = \widehat{\partial w / \partial s} = \pi_s = \pi_\varphi = w = 0. \quad (5.6b)$$

$$\text{при } s = l: T_{ss} = T_{s\varphi} = M_{ss} = \frac{\partial RM_{ss}}{\partial s} + 2 \frac{\partial M_{s\varphi}}{\partial \varphi} + \omega^2 R Y_s = S_{ss} = S_{s\varphi} = 0.$$

Сформулированную краевую задачу решаем также, как это сделано в главах 2–4. Вводим безразмерные переменные (1.2.26), где принимаем

$$L = l = l_{sp} + l_{cl}, \delta = L/R = l_{sp}/R + l_{cl}/R = \delta_{sp} + \delta_{cl}, \quad (5.7)$$

$$\delta_{cl} = \psi_2 - \psi_1 = \pi/2 - \psi_1,$$

при этом уравнение кривой сопряжения имеет вид

$$x = x_*, x_* = l_{sp}/L. \quad (5.8)$$

Следовательно, с учетом (5.3), (5.7), (5.8) безразмерные переменные (1.2.26) определяются по следующим формулам:

$$(1.2.26) \equiv \begin{cases} (4.11), & \text{при } 0 \leq x \leq x_* \\ (2.10), & \text{при } x_* < x \leq 1 \end{cases}$$

Таким образом, приходим к задаче определения собственных значений и собственных векторов системы уравнений в частных производных (1.4.1)–(1.4.3) с кусочно-непрерывными коэффициентами относительно 12-мерного вектора $y(x, \varphi)$:

$$A(x, D_\varphi) \frac{\partial y}{\partial x} = B(x, D_\varphi) y + \omega^2 C(x, D_\varphi) y, \quad 0 \leq x \leq 1 \quad (5.9)$$

$$My(0, \varphi) = O_{s \times 1}, \quad Ny(1, \varphi) = O_{s \times 1},$$

$$y(x_* - 0, \varphi) = y(x_* + 0, \varphi), \quad y(x, \varphi) = y(x, \varphi + 2\pi).$$

Здесь 6×12 матрицы M, N определяются формулой (2.14) при краевом условии (5.6а), а в случае (5.6б) имеют вид (2.15). A, B, C – матрицы 12-го порядка, элементы которых терпят разрыв на кривой $x = x_*$ и определяются следующим образом:

$$A = \begin{cases} A_{sp}, & 0 \leq x \leq x_* \\ A_{cl}, & x_* < x \leq 1 \end{cases}, \quad B = \begin{cases} B_{sp}, & 0 \leq x \leq x_* \\ B_{cl}, & x_* < x \leq 1 \end{cases}, \quad C = \begin{cases} C_{sp}, & 0 \leq x \leq x_* \\ C_{cl}, & x_* < x \leq 1 \end{cases}. \quad (5.10)$$

Нижние индексы «sp» и «cl», использованные в (5.7), (5.10), указыва-

ют на соответствие сопрягаемой части: сферический пояс и цилиндрическая поверхность. Соответственно в (5.10), элементы матриц с индексом «sp» определяются формулами (4.13) (см. § 4.1), а с индексом «cl» – коэффициентами системы (2.11) (см. § 2.1).

5.2. ПАРАМЕТРИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ СОБСТВЕННЫХ ЧАСТОТ И СОБСТВЕННЫХ ФОРМ СОСТАВНОЙ ОБОЛОЧКИ ВРАЩЕНИЯ

В параграфе обсуждается влияние параметров оболочки на спектр собственных частот и на формы собственных колебаний. В различных областях параметров конструкции оценивается зависимость расчетных значений собственных частот от поперечных сдвиговых деформаций. Проводится сравнительный анализ результатов, полученных для составной оболочки, с соответствующими данными для каждой из сопрягаемых частей.

Рассматривается двухслойная армированная составная оболочка, полученная сопряжением сферической и цилиндрической частей (рис. 5.1). Первый (внутренний) слой оболочки армирован в окружном направлении, а второй – в меридиональном. Принимались следующие параметры оболочки (см. (5.7) и $k = 1, 2$):

— геометрические:

$$R = 1\text{м}, R/h = 20, h_1 - h_0 = h_2 - h_1 = 0.5h, \quad (5.11\text{а})$$

$$x_* = (\pi/2 - \psi_1)/\delta = \delta_{\text{sp}}/\delta, \quad (5.11\text{б})$$

$$\delta = \delta_{\text{sp}} + \delta_{\text{cl}}, \delta_{\text{cl}} = 2, \delta_{\text{sp}} = \pi/2 - \psi_1 = \pi/3, \delta_{\text{sp}} : \delta_{\text{cl}} = 1 : 2 \quad (5.11\text{в})$$

— механические:

$$E_k^c = 3000\text{МПа}, E_k^a = 250\text{ГПа}, \nu_k^c = \nu_k^a = 0.3, \quad (5.12)$$

$$\rho_k^c = 1250\text{кг/м}^3, \rho_k^a = 1710\text{кг/м}^3$$

— структурные:

$$\omega_\delta = \omega_{l,1} = \omega_{z,k} = 0.5, \quad (5.13)$$

$$\omega_{l,2} = (\sin\psi_1 / \sin(\psi_1 + \delta x)) \cdot \omega_\delta, \text{ при } 0 \leq x \leq x_*, \quad (5.14a)$$

$$\omega_{l,2} = \sin\psi_1 \cdot \omega_\delta, \text{ при } x_* \leq x \leq l. \quad (5.14б)$$

Отметим, что формулы (5.14) соответствуют армированию меридионального слоя волокнами постоянного сечения ω_δ вдоль меридиана. Интенсивность армирования (5.14a) определена для сферической части оболочки и ее вывод повторяет вывод формулы (4.16). Формула (5.14б) задает интенсивность армирования цилиндрической части оболочки. Интенсивность армирования ω_l , определенная по (5.14), является функцией, непрерывной относительно длины меридиональной дуги.

В расчетах, представленных ниже, если специально не оговорено, коэффициент волнообразования $n = 2$; краевые условия соответствуют жесткому заземлению (5.6a).

5.2.1. ОЦЕНКА КОЛИЧЕСТВА АППРОКСИМИРУЮЩИХ РЕШЕНИЕ ФУНКЦИЙ ПРИ ЧИСЛЕННОМ РАСЧЕТЕ НИЖНЕГО УЧАСТКА СПЕКТРА СОБСТВЕННЫХ ЧАСТОТ

Данные, приведенные в таблице 5.1, отражают исследование скорости сходимости метода относительно параметра N при расчете собственных частот ω_0 – ω_5 . Их анализ показывает, что происходит приближение сверху к точным значениям собственных частот. Стабилизация вычисления первой частоты ω_0 достигается при $N = 8$, ω_1 – ω_3 – при $N = 10$, ω_4 – при $N = 12$, ω_5 – при $N = 14$.

Расчеты показали, что полученные значения параметра N типичны, и не зависят ни от значения параметра n , ни от характеристик оболочки, ни от оговоренных выше условий закрепления торцов. Это позволяет во всех дальнейших расчетах принять $N = 14$. Отметим, что скорость сходимости процесса относительно N для составной оболочки оказалась ниже, чем в

ранее рассмотренных случаях для оболочек вращения канонических форм (см. §§ 2.2.1, 3.2.1, 4.2.1).

Таблица 5.1

| Оценка скорости сходимости относительно параметра N ($n = 2$), Гц | | | | | | |
|---|------------|------------|------------|------------|------------|------------|
| N | ω_0 | ω_1 | ω_2 | ω_3 | ω_4 | ω_5 |
| 4 | 606.5 | 1459 | 2690 | 3354 | 5367 | 8143 |
| 6 | 603.1 | 1266 | 1949 | 2423 | 4528 | 5459 |
| 8 | 602.9 | 1252 | 1872 | 2366 | 2723 | 3524 |
| 10 | 602.9 | 1251 | 1868 | 2365 | 2492 | 3064 |
| 12 | 602.9 | 1251 | 1867 | 2365 | 2479 | 3023 |
| 14 | 602.9 | 1251 | 1867 | 2365 | 2479 | 3020 |
| 18 | 602.9 | 1251 | 1867 | 2365 | 2479 | 3020 |

5.2.2. СОБСТВЕННЫЕ ЧАСТОТЫ КАК ФУНКЦИИ ПАРАМЕТРА ОКРУЖНОГО ВОЛНООБРАЗОВАНИЯ

Влияние параметра окружного волнообразования n на значения низших собственных частот проиллюстрировано на рисунке 5.2. Эти данные еще раз подтверждают общеизвестный факт, что низшие частоты имеют минимумы как функции параметра n . Зависимость форм собственных колебаний составной оболочки от параметра n изучалась в § 5.2.3.

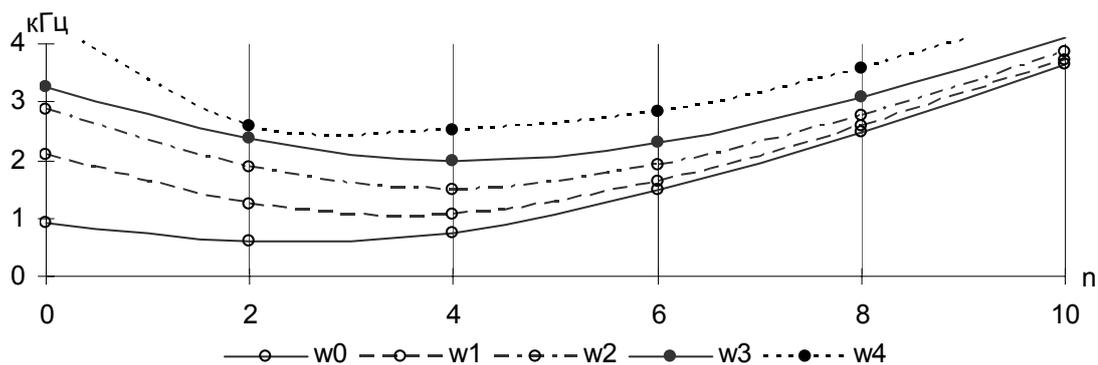


Рис. 5.2. Значения собственных частот ω_0 – ω_4 жестко заземленной оболочки, как функции параметра окружного волнообразования n .

5.2.3. ФОРМЫ СОБСТВЕННЫХ КОЛЕБАНИЙ СОСТАВНОЙ ОБОЛОЧКИ

В этом параграфе исследовались формы собственных колебаний составной оболочки вращения и их взаимосвязь с формами сопрягаемых оболочек. При изучении ставились следующие вопросы:

1. Зависимость форм от параметра волнообразования (§ 5.2.3.1).
2. Зависимость форм от соотношения длин меридианов сопрягаемых частей при неизменной длине меридиана оболочки. Варьировалось $\delta_{sp} : \delta_{cl}$, при $\delta = \text{const}$ (§ 5.2.3.2).
3. Зависимость форм от относительной длины меридиана оболочки при неизменном соотношении длин меридианов сопрягаемых частей. Варьировались δ_{sp} и δ_{cl} , при $\delta_{sp} : \delta_{cl} = \text{const}$ (§ 5.2.3.3).
4. Зависимость форм от относительных длин меридианов сопрягаемых поверхностей при неизменной относительной длине одной из сопрягаемых частей. Варьировалось δ_{sp} при $\delta_{cl} = \text{const}$, или δ_{cl} при $\delta_{sp} = \text{const}$ (§ 5.2.3.4).

В таблице 5.2 указаны значения параметра волнообразования n , а также условия закрепления кромочных поверхностей оболочки, использованные при рассмотрении перечисленных выше вопросов. Принимались значения, отмеченные знаком «+».

Таблица 5.2

| Некоторые характеристики условий исследования вопросов, сформулированных в § 5.2.3 | | | | | |
|--|---------------------------|---------|---------|------------------------------------|----------------|
| Номер вопроса | Параметр волнообразования | | | Закрепление кромочных поверхностей | |
| | $n = 0$ | $n = 2$ | $n = 4$ | жесткое (5.6a) | консоль (5.6б) |
| 1 | + | + | + | + | |
| 2 | + | + | | + | + |
| 3 | + | | | + | |
| 4 | | + | | + | |

5.2.3.1. ЗАВИСИМОСТЬ ФОРМ СОБСТВЕННЫХ КОЛЕБАНИЙ ОТ ПАРАМЕТРА ВОЛНООБРАЗОВАНИЯ

Рассматривалась жестко заземленная оболочка (5.11)–(5.14), где отношение $R/h = 60$. Кривая сопряжения описывается уравнением $x^* = 0.35$.

Собственные формы, полученные при $n = 0$, $n = 2$ и $n = 4$, приведены на рисунках 5.3–5.4, 5.5 и 5.6 соответственно. Как и в ранее рассматриваемых случаях, при $n > 0$ получены преимущественно изгибные собственные формы (рис. 5.5, 5.6). Осесимметричные формы, с частотами ω_2 , ω_5 , являются изгибными (рис. 5.4), а ω_0 , ω_1 , ω_3 , ω_4 – преимущественно крутильные (рис. 5.3).

Из рисунков 5.4–5.6 следует, что прогибы рассматриваемой составной оболочки при осесимметричных колебаниях развиваются (рис. 5.4) в ее сферической части, тогда как цилиндрическая составляющая практически прямолинейна. Однако, в случае $n > 0$, наблюдается противоположная ситуация: максимальные прогибы реализованы в цилиндрической части и практически погашены в сферической, причем этот эффект усиливается с ростом n (см. рис. 5.5 при $n = 2$, рис. 5.6 при $n = 4$).

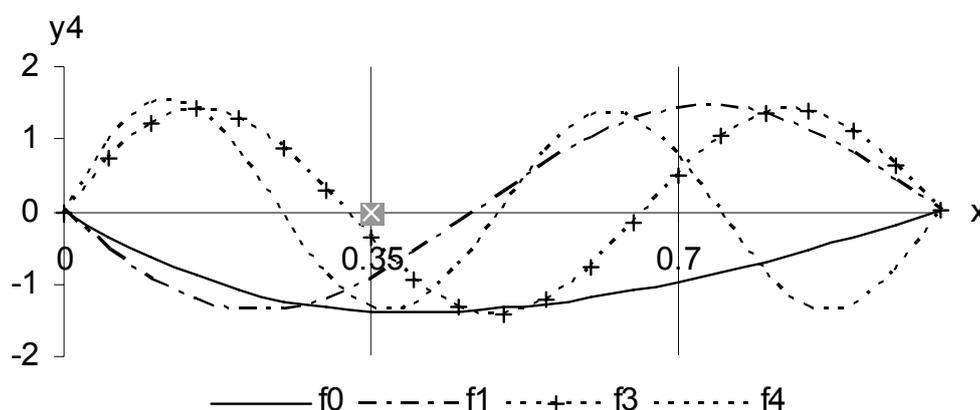


Рис. 5.3. Крутильные формы f_0 , f_1 , f_3 , f_4 , соответствующие частотам ω_0 , ω_1 , ω_3 , ω_4 , жестко заземленной оболочки. $l/R \approx 3$, $R/h = 60$, $x^* = 0.35$, $n = 0$. Плоскость (x, u_φ) .

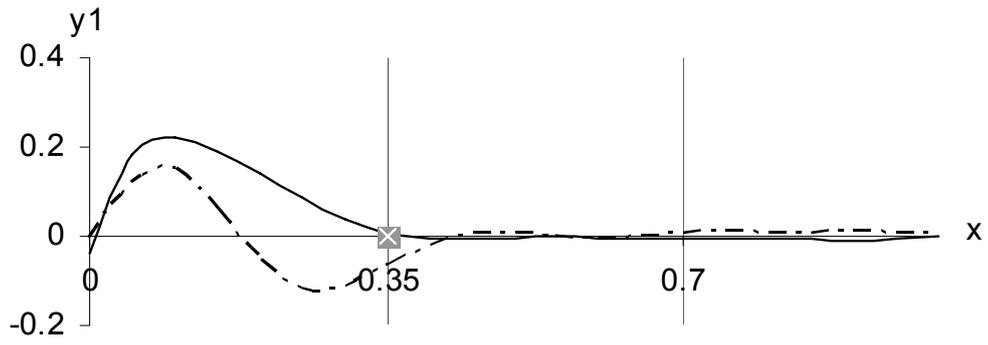


Рис. 5.4. Изгибные формы — f_2 , - · - f_5 , соответствующие частотам ω_2 , ω_5 , жестко заземленной оболочки. $l/R \approx 3$, $R/h = 60$, $x_* = 0.35$, $n = 0$. Плоскость (x , $60w$).

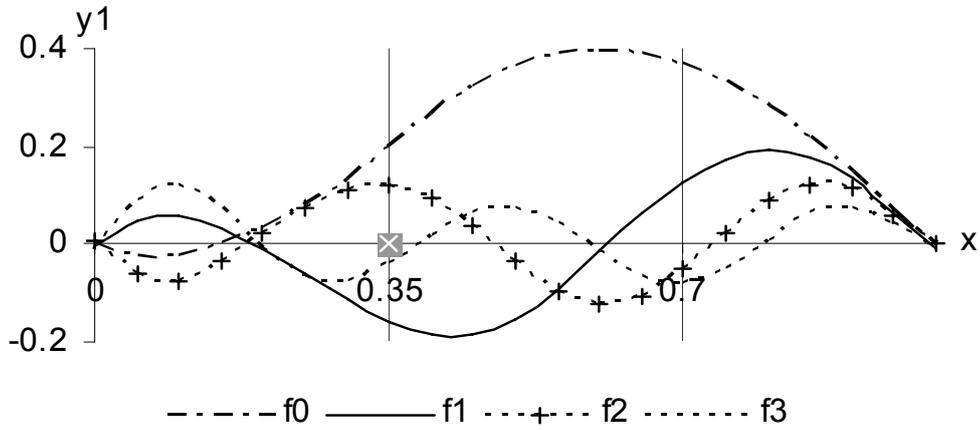


Рис. 5.5. Изгибные формы f_0 – f_3 , соответствующие частотам ω_0 – ω_3 , жестко заземленной оболочки. $l/R \approx 3$, $R/h = 60$, $x_* = 0.35$, $n = 2$. Плоскость (x , $60w$).

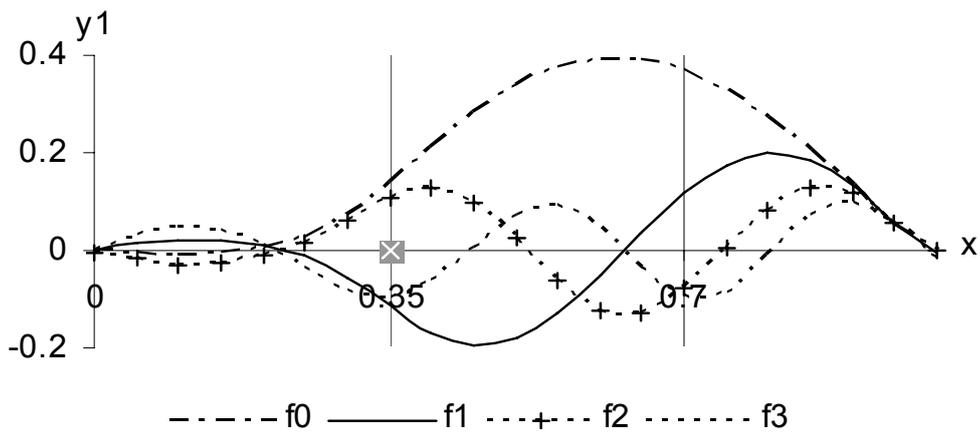


Рис. 5.6. Изгибные формы f_0 – f_3 , соответствующие частотам ω_0 – ω_3 , жестко заземленной оболочки. $l/R \approx 3$, $R/h = 60$, $x_* = 0.35$, $n = 4$. Плоскость (x , $60w$).

5.2.3.2. ВЛИЯНИЕ ПОЛОЖЕНИЯ ПОВЕРХНОСТИ СОПРЯЖЕНИЯ НА ФОРМЫ СОБСТВЕННЫХ КОЛЕБАНИЙ ПРИ ПОСТОЯННОЙ ДЛИНЕ МЕРИДИАНА ОБОЛОЧКИ

В параграфе исследовалась зависимость форм от соотношения длин сопрягаемых частей при постоянной длине меридиана. На рисунках 5.7–5.15 приведены осесимметричные формы ($n=0$) сопряженной оболочки с характеристиками (5.11а)–(5.14) при жестком закреплении краевых поверхностей (5.6а). Значение параметра $\delta = 1$ ($l/R = 1$). Рассматривались следующие соотношения между длинами частей:

$$(1:3) \quad \delta_{sp} : \delta_{cl} = 1:3 \text{ с точкой сопряжения } x^* = 0.25 \text{ (рис. 5.7, 5.8); (5.15а)}$$

$$(1:1) \quad \delta_{sp} : \delta_{cl} = 1:1 \text{ с точкой сопряжения } x^* = 0.5 \text{ (рис. 5.9, 5.10); (5.15б)}$$

$$(3:1) \quad \delta_{sp} : \delta_{cl} = 3:1 \text{ с точкой сопряжения } x^* = 0.75 \text{ (рис. 5.11, 5.12); (5.15в)}$$

$$(0:1) \quad \delta_{sp} : \delta_{cl} = 0:1 \text{ с точкой сопряжения } x^* = 0 \text{ (рис. 5.13–5.14); (5.16а)}$$

$$(1:0) \quad \delta_{sp} : \delta_{cl} = 1:0 \text{ с точкой сопряжения } x^* = 1 \text{ (рис. 5.14–5.15); (5.16б)}$$

Очевидно, что (5.16) соответствуют предельным случаям: (5.16а) – цилиндрическая оболочка, (5.16б) – сферический пояс. По результатам расчетов сделаны следующие выводы:

1. Положение поверхности сопряжения не повлияло на типы форм. Поскольку во всех рассматриваемых случаях (5.15), (5.16) формы, соответствующие частотам ω_0 , ω_3 являются преимущественно крутильными (рис. 5.8, 5.10, 5.12, 5.14), а частотам ω_1 , ω_2 , ω_4 , ω_5 – изгибными (рис. 5.7, 5.9, 5.11, 5.13, 5.15).

2. Положение поверхности сопряжения не повлияло на вид крутильных форм. Возможно это обусловлено тем, что крутильные формы оболочек с предельными положениями точки сопряжения (5.16) совпадают (рис. 5.14).

3. Максимальный прогиб форм колебаний также, как и его положение, зависят от соотношения длин сопрягаемых частей. Эволюция изгибных форм представлена на рисунках 5.16–5.19 и комментируется ниже.

В таблице 5.3 представлены данные, отражающие изменение расчетных значений собственных частот в рассматриваемом процессе. Надо отметить, что наблюдается незначительный разброс значений (менее 10%). Общих выраженных тенденций выявить не удалось.

Таблица 5.3

| Диапазон изменения собственных значений ω_0 – ω_5 осесимметричных колебаний, обусловленный новым положением поверхности сопряжения, и, рассчитанный относительно среднего значения частоты | | | | | | |
|--|------------|------------|------------|------------|------------|------------|
| диапазон \ ω_k | ω_0 | ω_1 | ω_2 | ω_3 | ω_4 | ω_5 |
| $\Delta\omega_k$, Гц | 335 | 227 | 501 | 339 | 276 | 749 |
| $\Delta\omega_k/\omega_{\text{сред}}$, % | 10 | 4.5 | 8.5 | 5 | 4 | 8 |

На рисунках 5.16–5.19 проиллюстрирована «эволюция» изгибных форм осесимметричных колебаний жестко заземленной составной оболочки в процессе смещения границы сопряжения поверхностей. Можно констатировать, что в этом процессе наиболее чувствительна первая из изгибных форм (рис. 5.16). Все остальные практически не изменились (рис. 5.17–5.19). Однако, характерно, что

1. Первые три изгибные формы, соответствующие ω_1 , ω_2 , ω_4 , по мере увеличения сферической составляющей переходят от одного предельного положения (отвечающего цилиндрической оболочке) к другому (отвечающему сферическому поясу) (рис. 5.16–5.18).

2. Последняя из рассматриваемых изгибных форм, соответствующая ω_5 , фактически моделирует две позиции: одна отвечает состояниям (1:0), (0:1), (1:1), а другая определяется симметричными сопряжениями (3:1) и (1:3) (рис. 5.19).

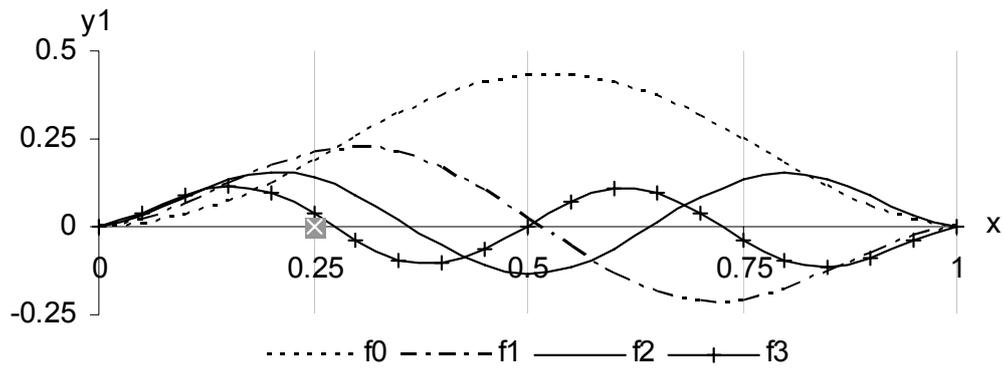


Рис. 5.7. Изгибные формы f_0 – f_3 , соответствующие частотам $\omega_1, \omega_2, \omega_4, \omega_5$ составной жестко защемленной оболочки с $x^* = 0.25, \delta_{sp}:\delta_{cl} = 1:3, n = 0$. Плоскость $(x, 20w)$.

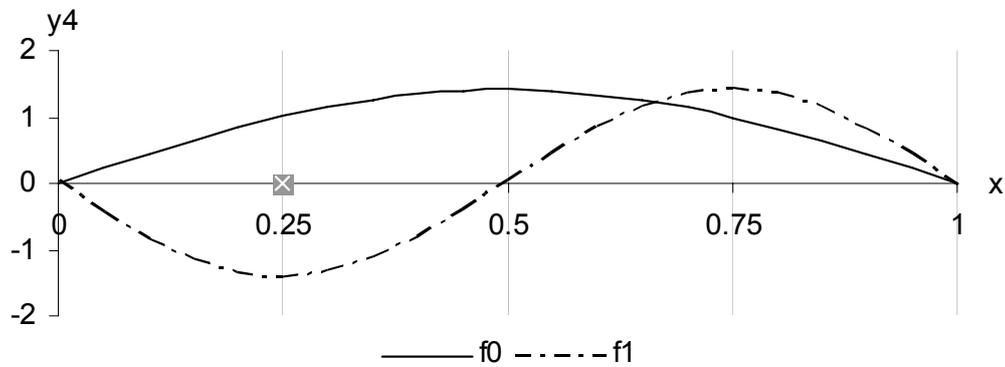


Рис. 5.8. Крутильные формы f_0, f_1 , соответствующие частотам ω_0, ω_3 составной жестко защемленной оболочки с $x^* = 0.25, \delta_{sp}:\delta_{cl} = 1:3, n = 0$. Плоскость (x, u_φ) .

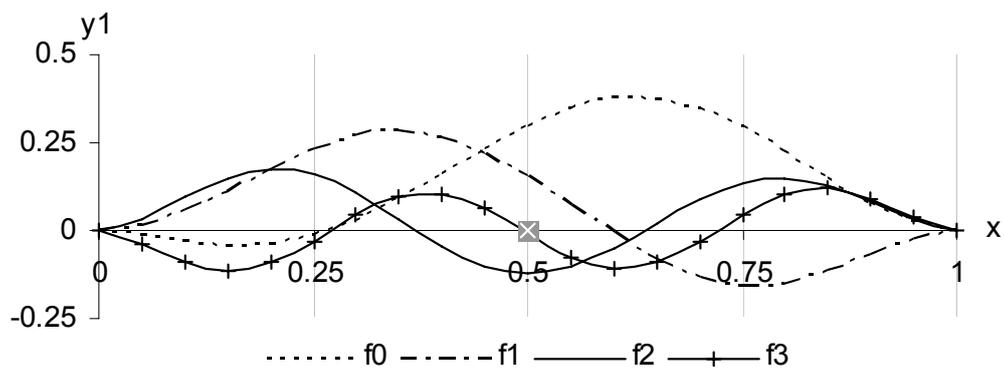


Рис. 5.9. Изгибные формы f_0 – f_3 , соответствующие частотам $\omega_1, \omega_2, \omega_4, \omega_5$ составной жестко защемленной оболочки с $x^* = 0.5, \delta_{sp}:\delta_{cl} = 1:1, n = 0$. Плоскость $(x, 20w)$.

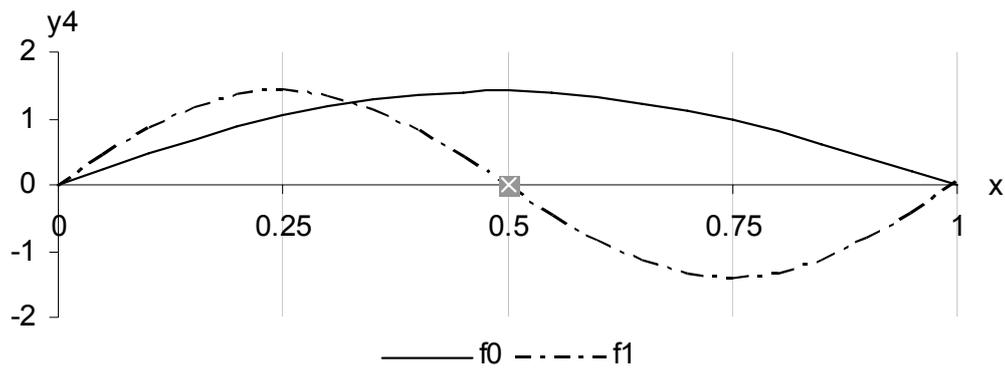


Рис. 5.10. Крутильные формы f_0, f_1 , соответствующие частотам ω_0, ω_3 составной жестко защемленной оболочки с $x^* = 0.5$, $\delta_{sp}:\delta_{cl} = 1:1$, $n = 0$. Плоскость (x, u_φ) .

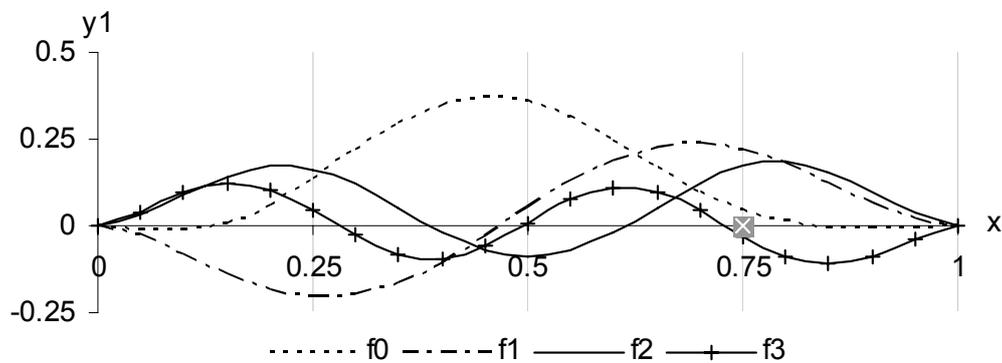


Рис. 5.11. Изгибные формы f_0-f_3 , соответствующие частотам $\omega_1, \omega_2, \omega_4, \omega_5$ составной жестко защемленной оболочки с $x^* = 0.75$, $\delta_{sp}:\delta_{cl} = 3:1$, $n = 0$. Плоскость $(x, 20w)$.

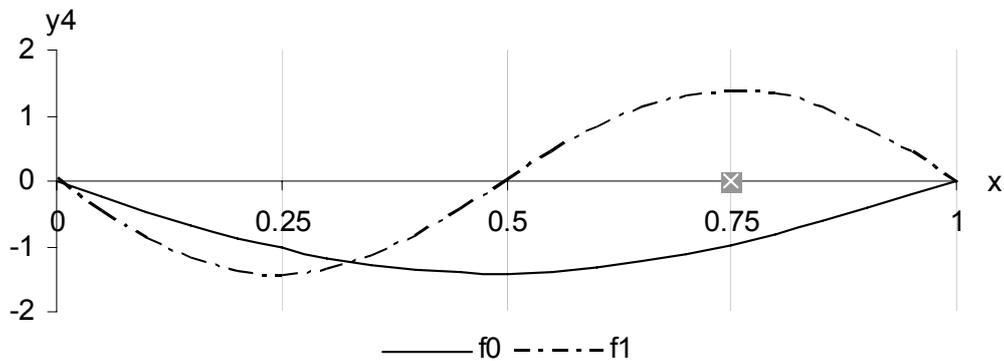


Рис. 5.12. Крутильные формы f_0, f_1 , соответствующие частотам ω_0, ω_3 составной жестко защемленной оболочки с $x^* = 0.75$, $\delta_{sp}:\delta_{cl} = 3:1$, $n = 0$. Плоскость (x, u_φ) .

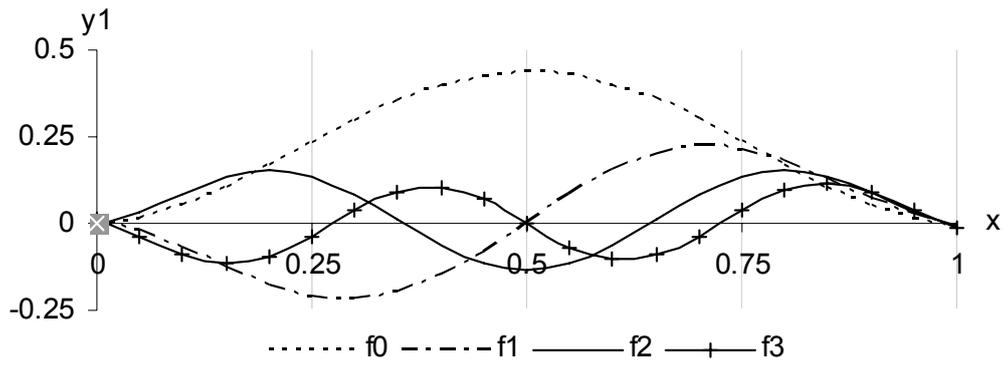


Рис. 5.13. Изгибные формы f_0 – f_3 , соответствующие частотам $\omega_1, \omega_2, \omega_4, \omega_5$ жестко заземленной цилиндрической оболочки. $x^* = 0, \delta_{sp}:\delta_{cl} = 0:1, n = 0$. Плоскость $(x, 20w)$.

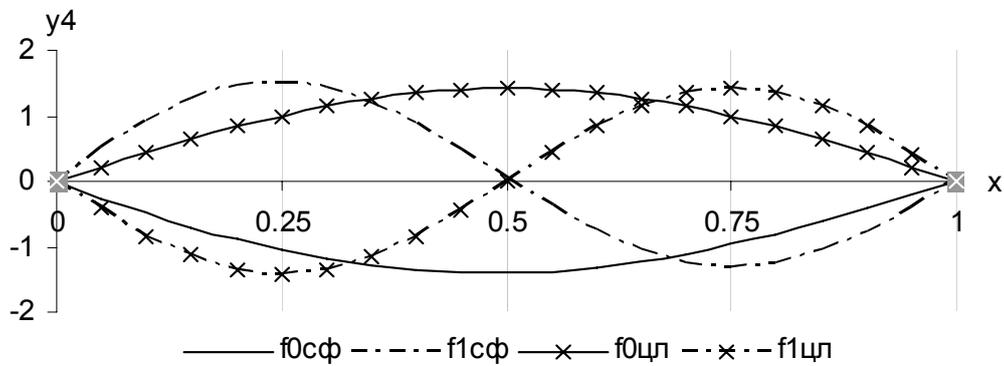


Рис. 5.14. Крутильные осесимметричные формы f_0, f_1 , соответствующие частотам ω_0, ω_3 жестко заземленной цилиндрической оболочки ($f_{цл}, x^* = 0, \delta_{sp}:\delta_{cl} = 0:1$) и сферического пояса ($f_{сф}, x^* = 1, \delta_{sp}:\delta_{cl} = 1:0$). Плоскость (x, u_φ) .

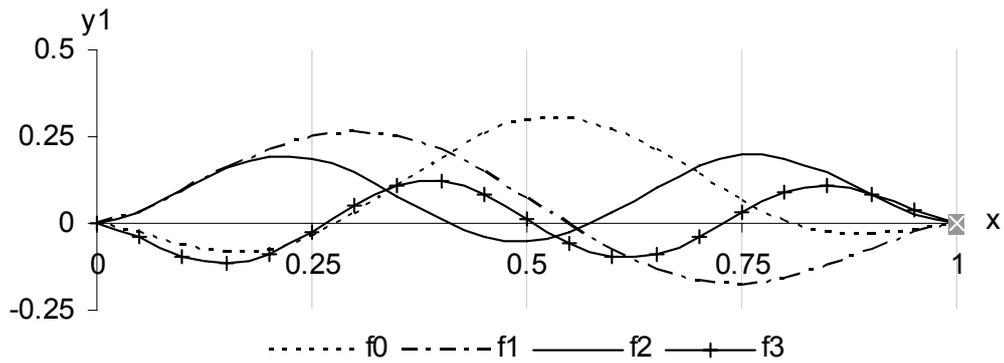


Рис. 5.15. Изгибные формы f_0 – f_3 , соответствующие частотам $\omega_1, \omega_2, \omega_4, \omega_5$ жестко заземленного сферического пояса. $x^* = 1, \delta_{sp}:\delta_{cl} = 1:0, n = 0$. Плоскость $(x, 20w)$.

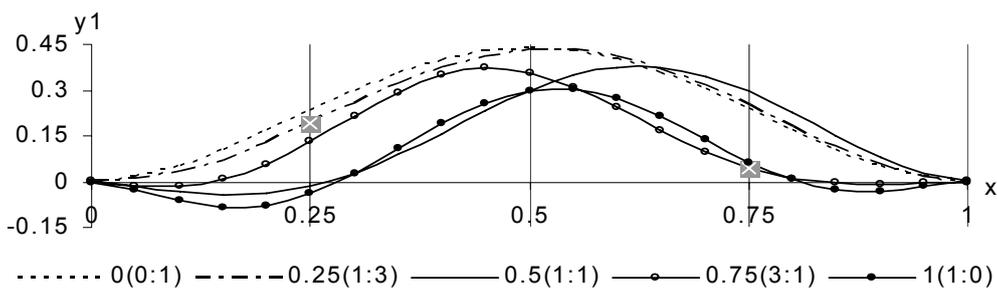


Рис. 5.16. Изгибная осесимметричная форма f_0 , соответствующая частоте ω_1 жестко заземленной составной оболочки. Плоскость $(x, 20w)$.

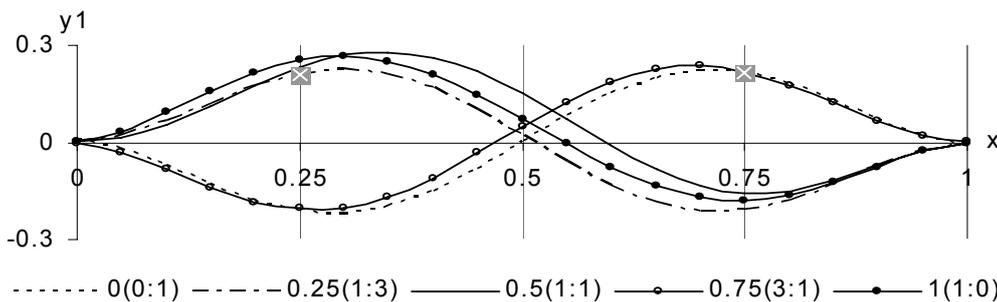


Рис. 5.17. Изгибная осесимметричная форма f_1 , соответствующая частоте ω_2 жестко заземленной составной оболочки. Плоскость $(x, 20w)$.

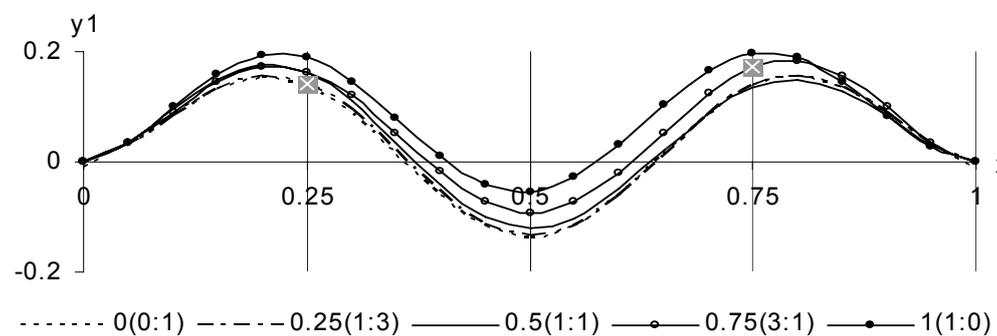


Рис. 5.18. Изгибная осесимметричная форма f_2 , соответствующая частоте ω_4 жестко заземленной составной оболочки. Плоскость $(x, 20w)$.

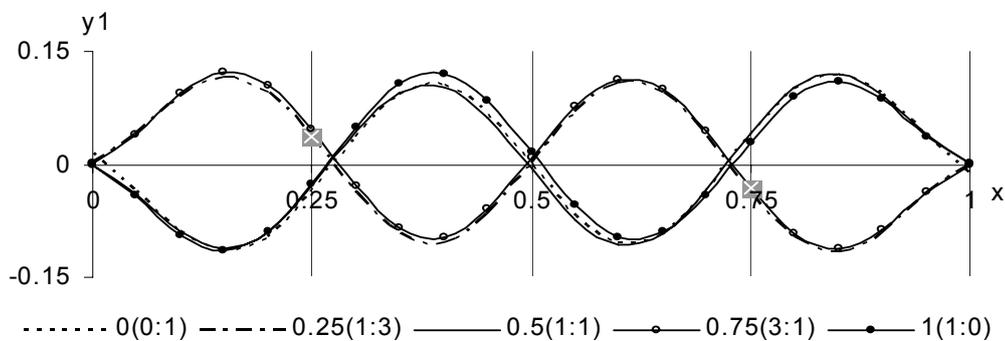


Рис. 5.19. Изгибная осесимметричная форма f_3 , соответствующая частоте ω_5 жестко заземленной составной оболочки. Плоскость $(x, 20w)$.

В заключение, выясним сохраняются ли отмеченные тенденции при переходе от жесткого закрепления кромочных поверхностей (5.6а) к условиям типа консоли (5.6б). Параметры оболочки (5.11а)–(5.14) оставались без изменений. Полученные данные представлены на рисунках 5.20–5.25. В результате их анализа сделаны следующие выводы:

1. Если в оболочке длина образующей цилиндрической части не меньше, чем сферической, т.е. при $\delta_{sp} : \delta_{cl} = \{(1:3), (1:1), (0:1)\}$, то типы форм не меняются. Как и прежде, формы, соответствующие частотам ω_0 , ω_3 являются крутильными (рис. 5.20, 5.21), а остальные – изгибными (рис. 5.22–5.25).

2. Если в оболочке доминирует сферическая составляющая, т.е. при $\delta_{sp} : \delta_{cl} = \{(3:1), (1:0)\}$, то не изменяется число крутильных и изгибных форм. Однако форма, соответствующая частоте ω_2 (рис. 5.21) становится крутильной, а частоте ω_3 – изгибной (рис. 5.22). Типы форм, соответствующих остальным частотам, не изменились.

3. Крутильные осесимметричные формы совпадают независимо от типа крепления кромочных поверхностей.

4. Зависимость изгибных форм от соотношения между длинами меридианов сопрягаемых поверхностей ослабевает по мере увеличения номера формы. Так, при увеличении сферической части составной оболочки для первой формы наблюдается последовательное уменьшение (до 50%) расчетной амплитуды колебаний. Отметим также, что в этом случае сохраняется ее характер вогнутости (рис. 5.22), тогда как в случае жесткого защемления он мог меняться (рис. 5.16). Кроме того, происходит смещение токи максимального прогиба к свободному краю $x = 1$.

Для второй формы собственных колебаний оболочки консольного типа амплитуда, как и характер вогнутости, оказались не зависимыми от рас-

смаатриваемых соотношений $\delta_{sp} : \delta_{cl}$ (рис. 5.23). Отметим так же, что для первых двух изгибных форм выделяются две группы. Одну группу составляют формы для оболочек типа (0:1), (1:3), (1:1), т. е. с доминирующей цилиндрической составляющей, другую – (1:0) и (3:1), т. е. с большей долей сферической части.

Третья и четвертая изгибные формы совпадают при всех соотношениях (5.15), (5.16). Разница в амплитудах составила менее 20%, с сохранением положения экстремумов прогиба (с точностью до одного узла, т. е. $x \pm 0.05$) (рис. 5.24–5.25).

В заключении этого параграфа, проведено алогичное исследование форм осесимметричных колебаний оболочки типа (5.6б) большей относительной длины, т. е. при $\delta = 1.5$ ($l/R = 1.5$). Результаты приведены на рисунках 5.26–5.31, на их основе сделаны выводы:

1. Для оболочек с большей цилиндрической частью, т.е. при $\delta_{sp} : \delta_{cl} = \{(1:3), (0:1)\}$, формы, соответствующие частотам ω_0, ω_1 являются крутильными (рис. 5.26, 5.27), а частотам $\omega_2-\omega_5$ – изгибными (рис. 5.28–5.31). Если же доминирует сферическая составляющая, т.е. $\delta_{sp} : \delta_{cl} = \{(1:1), (3:1), (1:0)\}$, то формы, соответствующие частотам ω_0, ω_2 являются крутильными (рис. 5.26, 5.27), а частотам $\omega_1, \omega_3-\omega_5$ – изгибными (рис. 5.28–5.31).

2. Все сказанное в случае параметра $l/R = 1$ остается верным и здесь при $l/R = 1.5$. Исключение составляет объединение в группы: одну группу составляют формы для оболочек типа (0:1), (1:3), т. е. с большей долей цилиндрической части, другую – (1:0), (1:1) и (3:1), т. е. с доминирующей сферической составляющей.

Отметим, что на рисунке 5.32 представлены собственные частоты рассмотренной составной оболочки с $l/R = 1.5$.

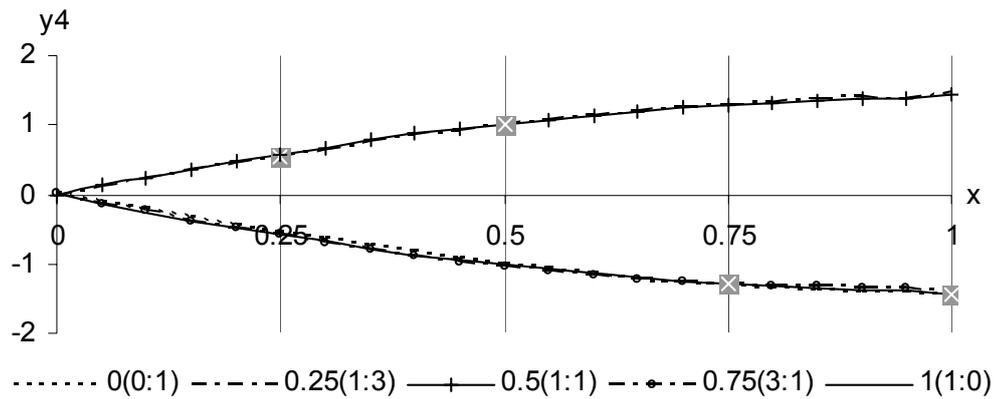


Рис. 5.20. Первая крутильная форма колебаний оболочки консольного типа как функция $\delta_{sp}:\delta_{cl}$. Графики $x^*(\delta_{sp}:\delta_{cl})$ при $l/R = 1$, $n = 0$. Плоскость (x, u_φ) .

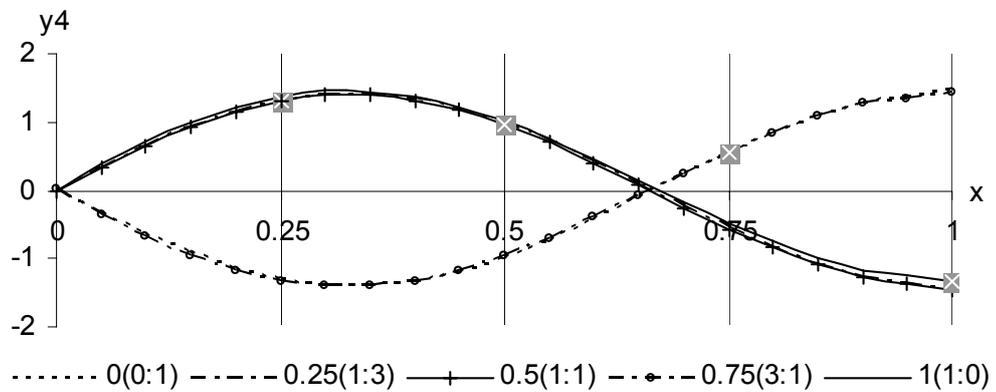


Рис. 5.21. Вторая крутильная форма колебаний составной оболочки консольного типа как функция $\delta_{sp}:\delta_{cl}$. Графики $x^*(\delta_{sp}:\delta_{cl})$ при $l/R = 1$, $n = 0$. Плоскость (x, u_φ) .

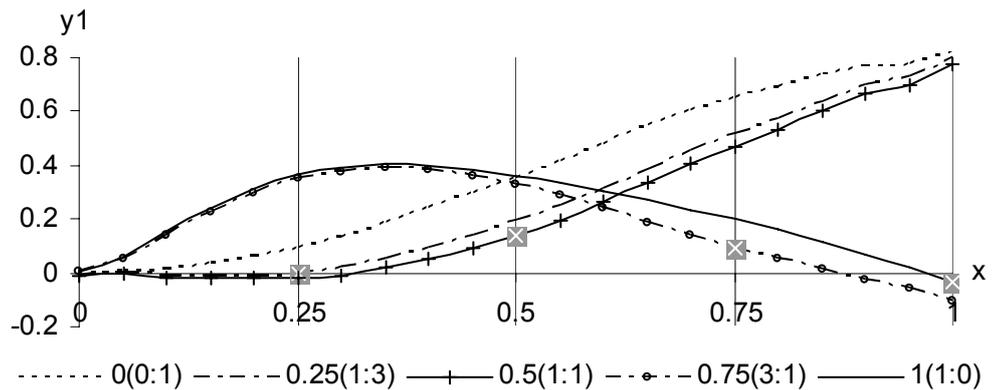


Рис. 5.22. Первая изгибная форма колебаний составной оболочки консольного типа как функция $\delta_{sp}:\delta_{cl}$. Графики $x^*(\delta_{sp}:\delta_{cl})$ при $l/R = 1$, $n = 0$. Плоскость $(x, 20w)$.

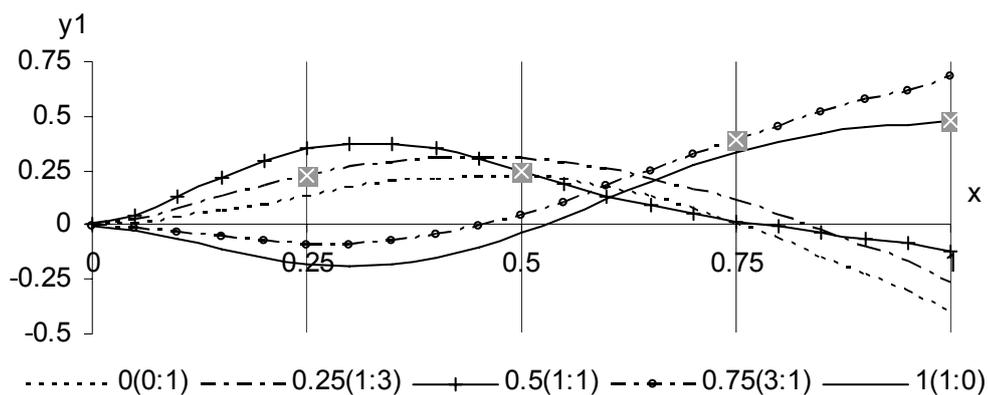


Рис. 5.23. Вторая изгибная форма колебаний составной оболочки консольного типа как функция $\delta_{sp}:\delta_{cl}$. Графики $x_*(\delta_{sp}:\delta_{cl})$ при $//R = 1, n = 0$. Плоскость $(x, 20w)$.

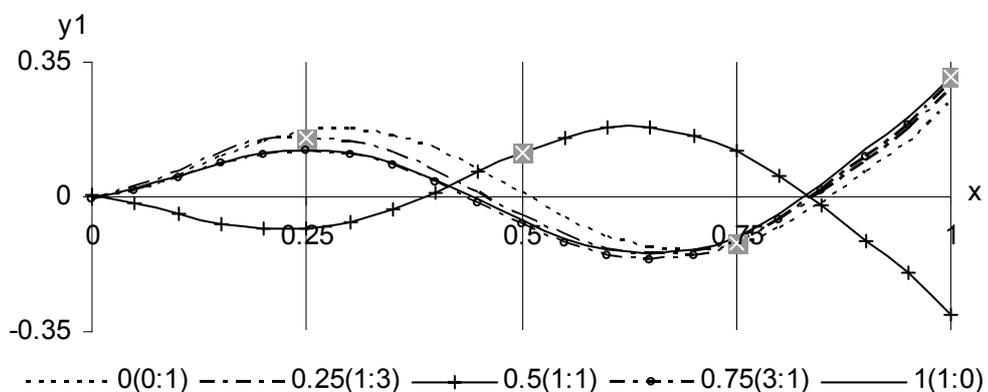


Рис. 5.24. Третья изгибная форма колебаний составной оболочки консольного типа как функция $\delta_{sp}:\delta_{cl}$. Графики $x_*(\delta_{sp}:\delta_{cl})$ при $//R = 1, n = 0$. Плоскость $(x, 20w)$.

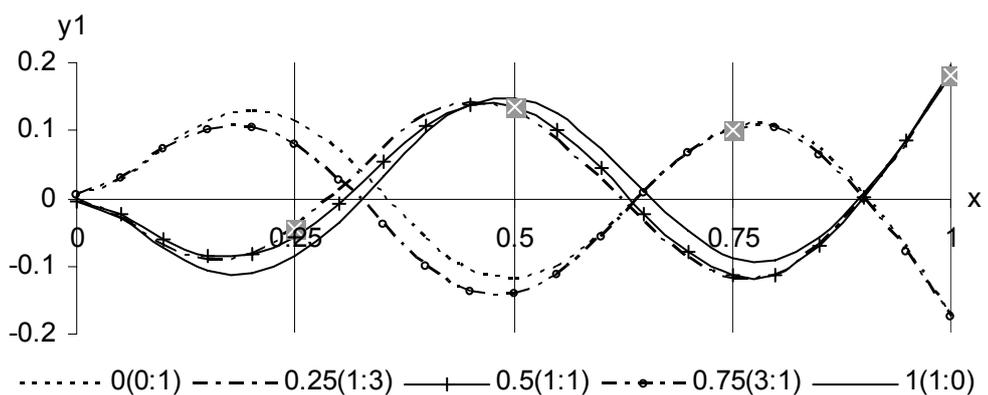


Рис. 5.25. Четвертая изгибная форма колебаний составной оболочки консольного типа как функция $\delta_{sp}:\delta_{cl}$. Графики $x_*(\delta_{sp}:\delta_{cl})$ при $//R = 1, n = 0$. Плоскость $(x, 20w)$.

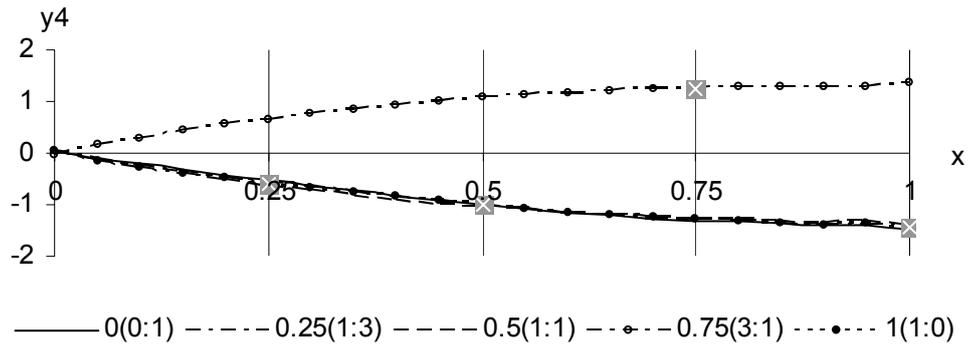


Рис. 5.26. Первая крутильная форма колебаний составной оболочки консольного типа как функция $\delta_{sp}:\delta_{cl}$. Графики $x^*(\delta_{sp}:\delta_{cl})$ при $l/R = 1.5$, $n = 0$. Плоскость (x, u_φ) .

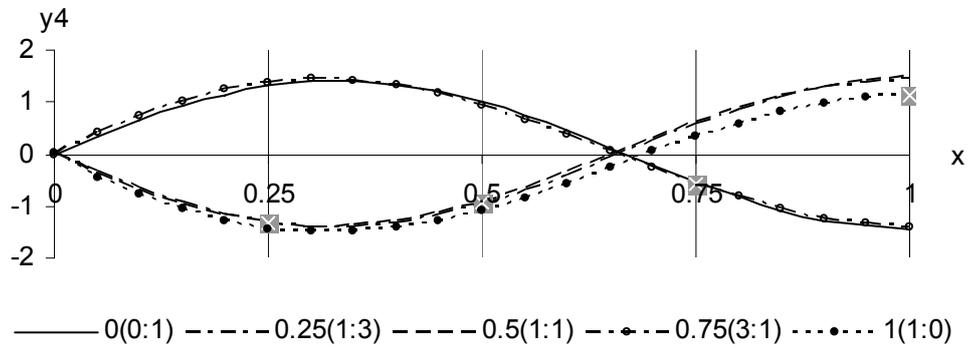


Рис. 5.27. Вторая крутильная форма колебаний составной оболочки консольного типа как функция $\delta_{sp}:\delta_{cl}$. Графики $x^*(\delta_{sp}:\delta_{cl})$ при $l/R = 1.5$, $n = 0$. Плоскость (x, u_φ) .

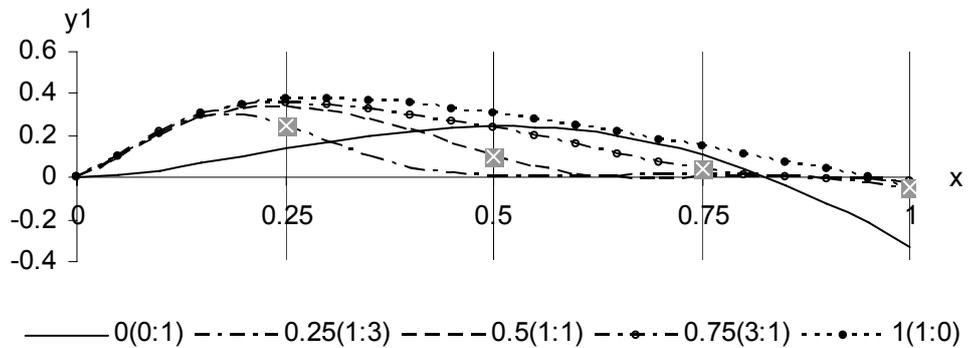


Рис. 5.28. Первая изгибная форма колебаний составной оболочки консольного типа как функция $\delta_{sp}:\delta_{cl}$. Графики $x^*(\delta_{sp}:\delta_{cl})$ при $l/R = 1.5$, $n = 0$. Плоскость $(x, 20w)$.

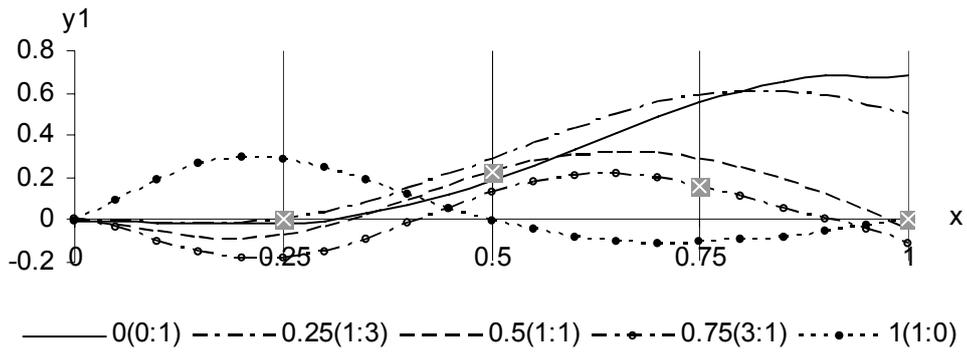


Рис. 5.29. Вторая изгибная форма колебаний составной оболочки консольного типа как функция $\delta_{sp}; \delta_{cl}$. Графики $x*(\delta_{sp}; \delta_{cl})$ при $l/R = 1.5, n = 0$. Плоскость $(x, 20w)$.

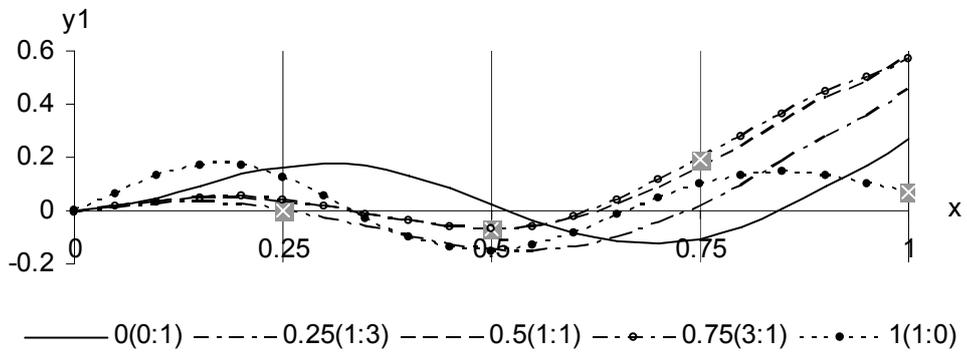


Рис. 5.30. Третья изгибная форма колебаний составной оболочки консольного типа как функция $\delta_{sp}; \delta_{cl}$. Графики $x*(\delta_{sp}; \delta_{cl})$ при $l/R = 1.5, n = 0$. Плоскость $(x, 20w)$.

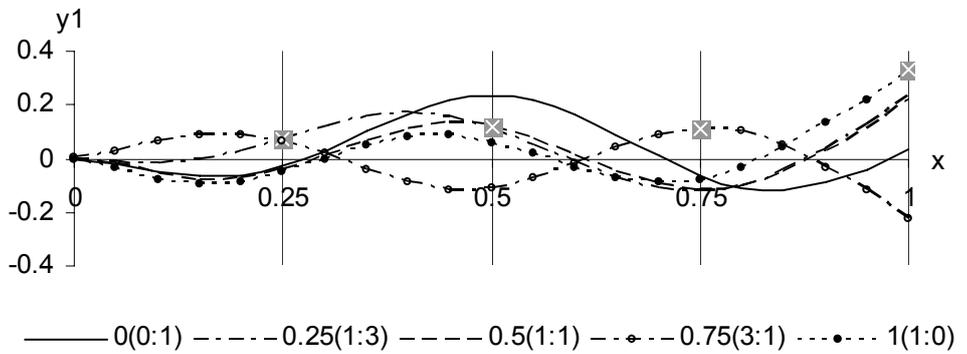


Рис. 5.31. Четвертая изгибная форма колебаний составной оболочки консольного типа как функция $\delta_{sp}; \delta_{cl}$. Графики $x*(\delta_{sp}; \delta_{cl})$ при $l/R = 1.5, n = 0$. Плоскость $(x, 20w)$.

5.2.3.3. ВЛИЯНИЕ ПОЛОЖЕНИЯ ПОВЕРХНОСТИ СОПРЯЖЕНИЯ НА ФОРМЫ СОБСТВЕННЫХ КОЛЕБАНИЙ ПРИ ПОСТОЯННОМ ОТНОШЕНИИ ДЛИН МЕРИДИАНОВ СОПРЯГАЕМЫХ ПОВЕРХНОСТЕЙ

Обобщая результаты, представленные в предыдущем параграфе, в некоторой степени ответим на вопрос, сформулированный в заголовке. Соответствующие данные приведены в таблице 5.4.

Таблица 5.4

| Зависимость типа собственных форм составной оболочки от относительной длины меридиана, от положения поверхности сопряжения и от типа закрепления краевых поверхностей | | | | | | |
|---|---------------------------|------------|------------|------------|------------|----------------------|
| δ | $\delta_{sp}:\delta_{cl}$ | ω_0 | ω_1 | ω_2 | ω_3 | ω_4, ω_5 |
| $\delta = 1$ при (5.6a) | (1:0), (3:1) | крутильная | изгибная | изгибная | крутильная | изгибная |
| | (1:1) | | | | | |
| | (1:3), (0:1) | | | | | |
| $\delta = 1$ при (5.6б) | (1:0), (3:1) | крутильная | изгибная | крутильная | изгибная | изгибная |
| | (1:1) | | | изгибная | крутильная | |
| | (1:3), (0:1) | | | | | |
| $\delta = 1.5$ при (5.6б) | (1:0), (3:1) | крутильная | изгибная | крутильная | изгибная | изгибная |
| | (1:1) | | крутильная | изгибная | | |
| | (1:3), (0:1) | | | | | |

На основе таблицы и выводов, сделанных в § 5.2.3.2, резюмируем:

1. Во всех рассмотренных случаях число изгибных и крутильных форм не изменяется, 4 и 2 соответственно.
2. Во всех рассмотренных случаях вид крутильных форм постоянен с точностью до знака при любом положении поверхности сопряжения.
3. При жестком защемлении краевых поверхностей составной оболочки совпадают типы форм ее предельных конфигураций, т. е. сферического пояса и цилиндрической оболочки. Возможно поэтому, типы форм не зависят от положения поверхности сопряжения.
4. При консольном креплении (5.6б), в отличие от жесткого (5.6a), типы форм предельных конфигураций оболочки различны. Поэтому положение поверхности сопряжения может изменить тип формы, соответствующую

щей конкретной частоте. Можно выдвинуть гипотезу: найдется значение параметра $\delta^* = l/R \in [1, 1.5]$ такое, что при $l/R \leq \delta^*$ в определении типа формы доминирует цилиндрическая часть, а при $l/R > \delta^*$ – сферическая составляющая.

На диаграмме 5.32 представлены собственные частоты составной оболочки консольного типа (5.6б) с параметром $l/R = 1.5$, формы которой были приведены на рисунках 5.26–5.31.

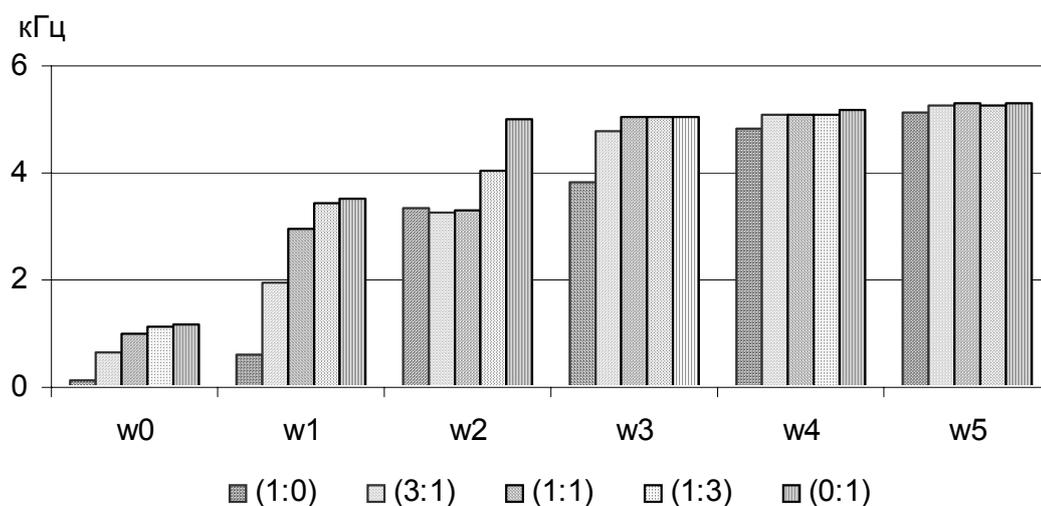


Рис. 5.32. Расчетные значения собственных частот ω_0 – ω_5 составной оболочки консольного типа, как функции параметра $\delta_{sp}:\delta_{cl}$ при $l/R = 1.5$, $R/h = 20$, $n = 0$.

Из рисунка видно, что при увеличении доли одной из сопрягаемых частей, разница между значениями собственных частот составной конструкции и частотами соответствующей предельной конфигурации уменьшается.

5.2.3.4. ВЛИЯНИЕ ПОЛОЖЕНИЯ ПОВЕРХНОСТИ СОПРЯЖЕНИЯ НА ФОРМЫ СОБСТВЕННЫХ КОЛЕБАНИЙ ПРИ ПОСТОЯННОЙ ДЛИНЕ МЕРИДИАНА ОДНОЙ ИЗ СОПРЯГАЕМЫХ ЧАСТЕЙ

В этом параграфе исследуются формы f_0 – f_2 собственных колебаний составной оболочки, отвечающие первым трем собственным частотам ω_0 –

ω_2 . Проанализировано влияние на них положения кривой сопряжения частей, обусловленное изменением относительной длины только одной из частей (рис. 5.33):

а) сферической составляющей при неизменной цилиндрической (рис. 5.33б–5.33в);

б) цилиндрической составляющей при неизменной сферической (рис. 5.33а–5.33б).

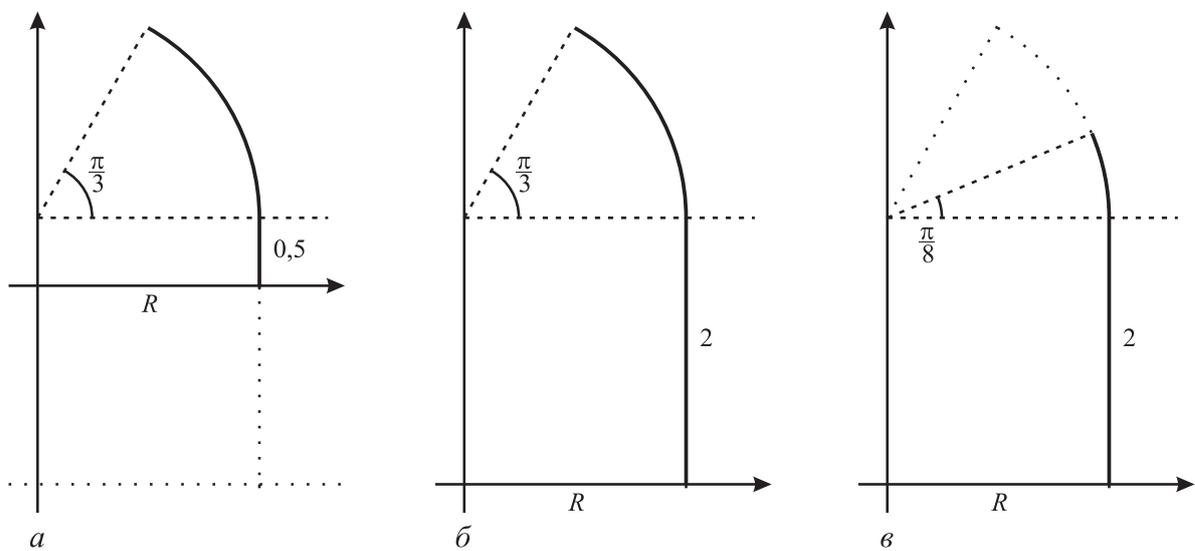


Рис. 5.33. Образующая составной оболочки вращения, полученной сопряжением сферической и цилиндрической частей. Цифры, выставленные на дугах, соответствуют длине, отнесенной к радиусу.

Рассматривались жестко защемленные оболочки (5.6а), с параметрами (5.11)–(5.14), где $R/h = 60$. Исключение составляют параметры δ_{sp} , δ_{cl} и x_* , которые определялись по одному из следующих вариантов:

$$(*.-) \psi_1 = \pi/6, \delta_{sp} = \pi/3, \delta_{cl} = 0.5, \delta_{sp} : \delta_{cl} \approx 2 : 1, \delta \approx 1.5, x_* = 0.68; \quad (5.17a)$$

$$(*.*) \psi_1 = \pi/6, \delta_{sp} = \pi/3, \delta_{cl} = 2, \delta_{sp} : \delta_{cl} \approx 1 : 2, \delta \approx 3, x_* = 0.35; \quad (5.17б)$$

$$(-.*) \psi_1 = 3\pi/8, \delta_{sp} = \pi/8, \delta_{cl} = 2, \delta_{sp} : \delta_{cl} \approx 1 : 5, \delta \approx 2.5, x_* = 0.16. \quad (5.17в)$$

Здесь «*» означает базовые параметры сопрягаемой части (первая для сферической, вторая для цилиндрической), «-» – это уменьшение длины образующей соответствующей части. Образующие оболочек (5.17а)–

(5.17в) представлены на рисунках 5.33(а–в) соответственно. Коэффициент волнообразования $n = 2$.

Изменение собственных форм f_0 – f_2 при изменении длин меридианов сопрягаемых частей оболочки по вариантам (5.17) проиллюстрировано на рисунках 5.35–5.37. Выявлены следующие особенности:

1. Первая изгибная форма f_0 : При уменьшении сферической составляющей, т. е. для (5.17в), произошло незначительное увеличение амплитуды колебаний (около 8%); при этом форма становится выпуклой и максимум прогиба сдвигается ближе к середине меридиана. Уменьшение цилиндрической части приводит как к убыванию амплитуды на 23%, так и к появлению нуля, при переходе через который форма меняет характер вогнутости.

2. Вторая изгибная форма f_1 : При уменьшении сферической составляющей наблюдается (как и для f_0) увеличение амплитуды колебаний (около 11%); при этом в форме отчетливее проявляется симметрия относительно нуля прогиба. Уменьшение цилиндрической части приводит к убыванию амплитуды с выполнением $|w_{\max}| \approx |w_{\min}|$, так как $y_{1\max} \approx 0.16$, $y_{1\min} \approx -0.15$. Следует отметить, что уменьшение амплитуды, рассчитанной в цилиндрической части, составило около 20%.

3. Третья изгибная форма f_2 : При уменьшении сферической составляющей снова наблюдается незначительное увеличение амплитуды колебаний (около 19.5%) со сдвигом максимумов к торцам; при этом в форме отчетливее проявляется симметрия относительно середины меридиана оболочки. Уменьшение цилиндрической части приводит к значительному скачку амплитуды (рост на 124%) в сферической части и практически полным затуханием в цилиндрической (спад на 60%).

Обобщая сказанное выше, можно отметить, что уменьшение сферической составляющей «выравнивает» формы колебаний относительно сере-

дины меридиана, усиливая тенденции к симметрии. Это дает возможность считать, что формы приближаются к соответствующим формам цилиндрической оболочки. Наблюдаемый процесс характеризуется ростом амплитуды в цилиндрической части и ее уменьшением в сферической.

Относительно собственных значений, полученных в рассматриваемых случаях, подтверждена тенденция увеличения частот при уменьшении относительной длины оболочки. Соответствующие данные представлены на рисунке 5.34.

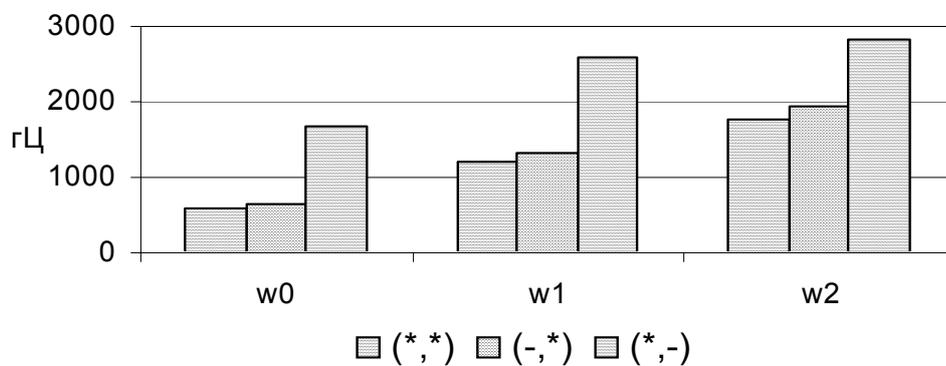


Рис. 5.34. Собственные частоты ω_0 – ω_2 составной оболочки как функции относительной длины меридиана. (*, *) – $\delta \approx 3$; (-, *) – $\delta \approx 2.5$; (*, -) – $\delta \approx 1.5$.

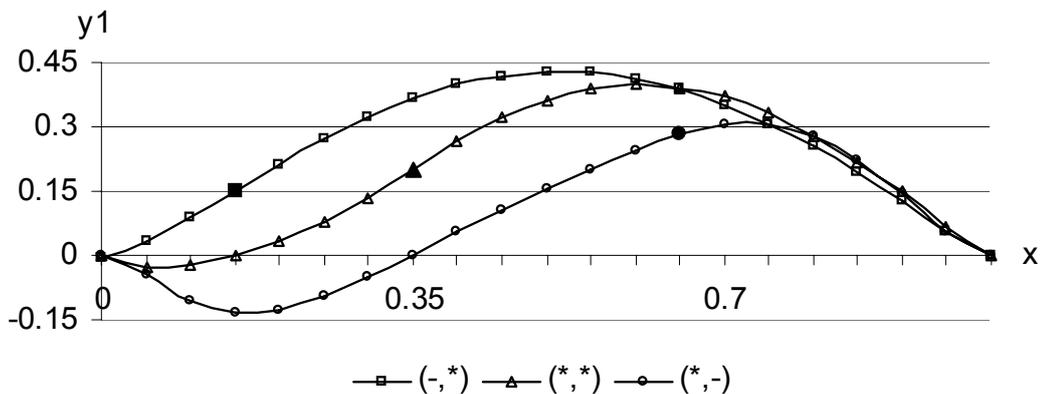


Рис. 5.35. Изгибная форма f_0 жестко заземленной составной оболочки, рассматриваемая как функция длин образующих сопрягаемых частей при $n = 2$. Плоскость $(x, 60w)$.

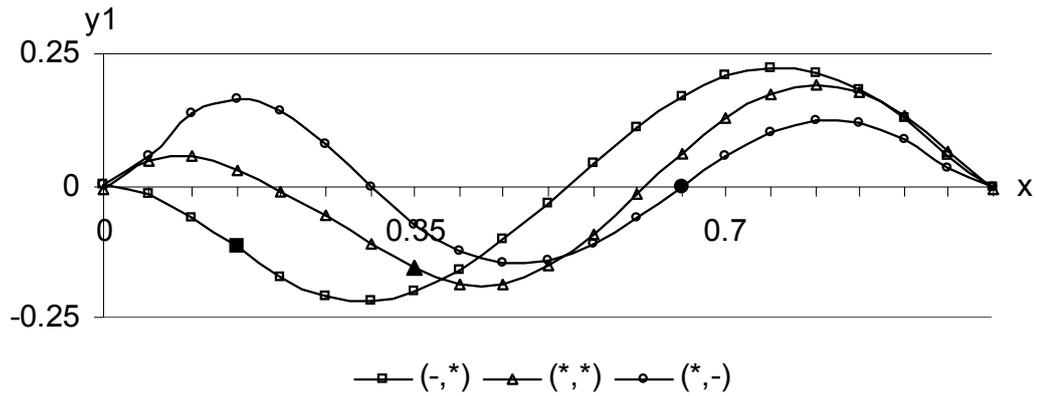


Рис. 5.36. Изгибная форма f_1 жестко защемленной составной оболочки, рассматриваемая как функция длин образующих сопрягаемых частей при $n = 2$. Плоскость $(x, 60w)$.

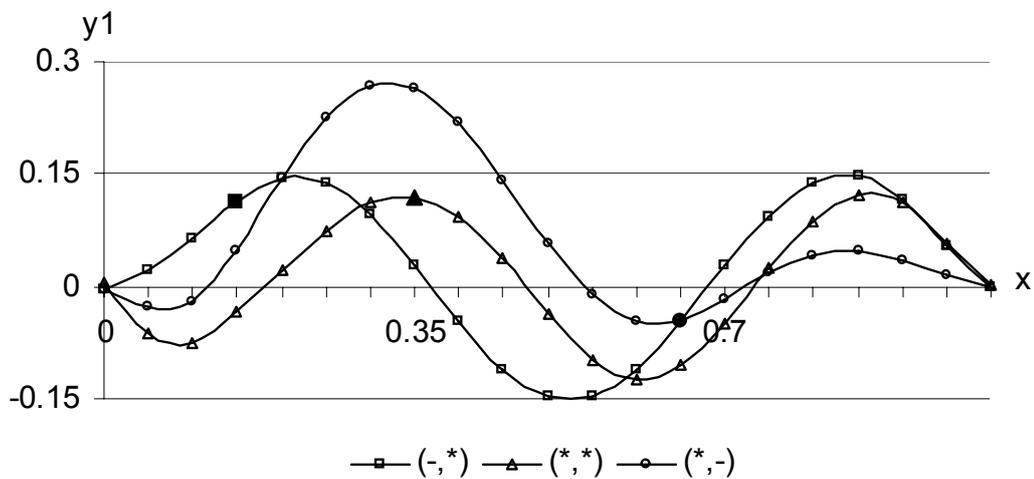


Рис. 5.37. Изгибная форма f_2 жестко защемленной составной оболочки, рассматриваемая как функция длин образующих сопрягаемых частей при $n = 2$. Плоскость $(x, 60w)$.

5.2.4. ЗАВИСИМОСТЬ ЗНАЧЕНИЙ СОБСТВЕННЫХ ЧАСТОТ И СТЕПЕНИ ВЛИЯНИЯ НА НИХ ПОПЕРЕЧНОГО СДВИГА ОТ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИК ОБОЛОЧКИ

5.2.4.1. ВАРЬИРОВАНИЕ ОТНОСИТЕЛЬНОЙ ДЛИНЫ МЕРИДИАНА ОБОЛОЧКИ

На рисунках 5.38–5.41 представлены результаты расчета оболочки (5.11)–(5.14) с отношением $\delta_{sp}:\delta_{cl} = 1:3$. Следовательно, узел сопряжения $x_*=0.25$. Кромочные поверхности жестко защемлены (5.6а); коэффициент волнообразования на рис. 5.38, 5.39 соответствует $n = 0$, а на рис. 5.40, 5.41

принято $n = 2$. Сделаны следующие выводы:

1. Значения низших собственных частот монотонно убывают с ростом параметра l/R (рис. 5.38, 5.40). Следовательно, чем «длиннее» оболочка, тем меньше частота ее свободных колебаний.

2. Влияние сдвига значимо лишь на «очень коротких» оболочках, т. е. при $l/R \leq 0.5$. Поскольку погрешность, вносимая неучетом сдвига в расчетные значения частот, превышает 25%. Однако, уже при $l/R = 1$ значение погрешности уменьшается до 6%, стремясь далее к нулю (рис. 5.39, 5.41).

Аналогичные заключения для оболочек канонических форм были сделаны ранее как в упомянутых выше работах других авторов, так и в предыдущих главах данной работы (см. §§ 2.2.4.2, 3.2.4.2, 4.2.4.2).

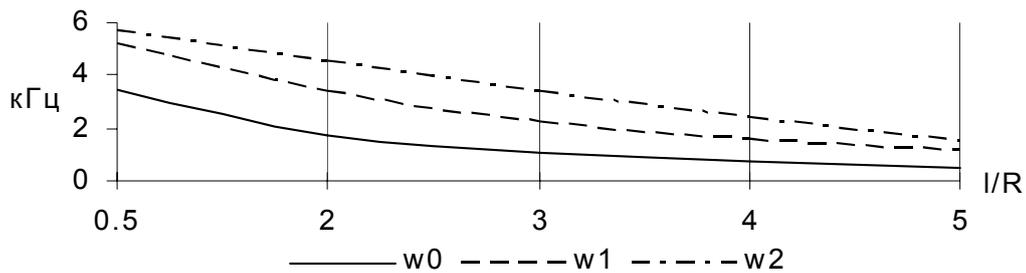


Рис. 5.38. Собственные частоты $\omega_0-\omega_2$, рассматриваемые как функции параметра l/R ($n = 0$).

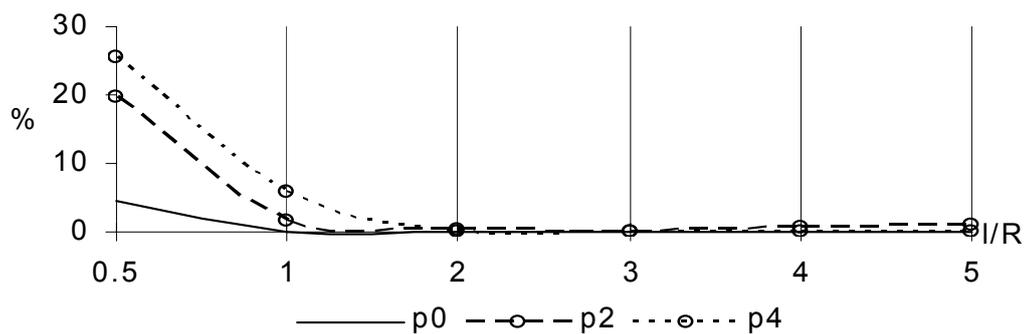


Рис. 5.39. Погрешности p_0, p_2, p_4 ($p_1 \approx p_0, p_3 \approx p_2$) расчета собственных частот $\omega_0-\omega_4$, обусловленные неучетом сдвига, и, рассматриваемые как функции параметра l/R ($n = 0$).

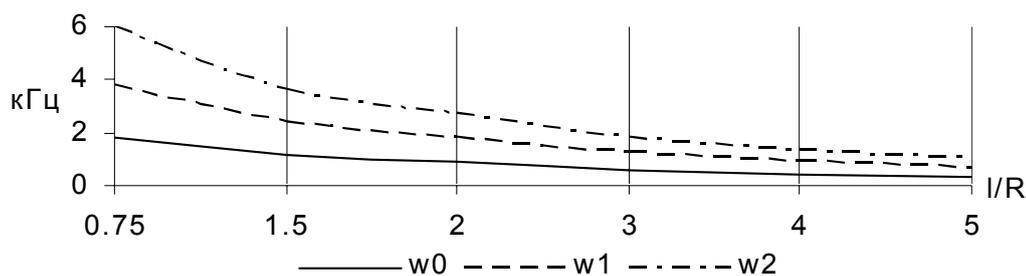


Рис. 5.40. Собственные частоты ω_0 – ω_2 , рассматриваемые как функции параметра l/R ($n = 2$).

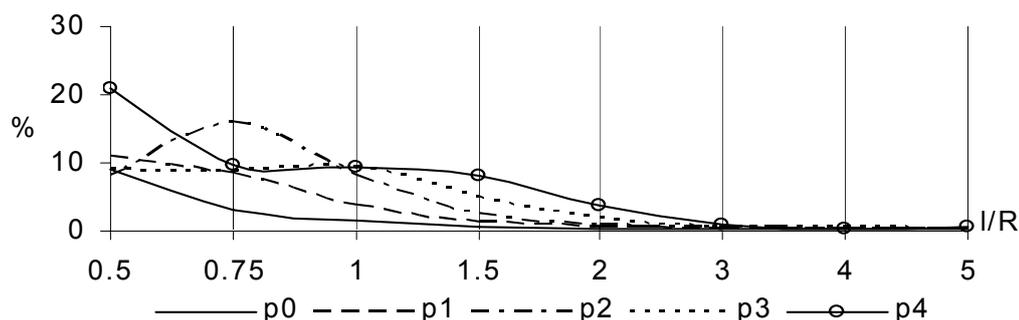


Рис. 5.41. Погрешности p_0, p_2, p_4 ($p_1 \approx p_0, p_3 \approx p_2$) расчета собственных частот ω_0 – ω_4 , обусловленные неучетом сдвига, и, рассматриваемые как функции параметра l/R ($n = 2$).

5.2.4.2. ВАРЬИРОВАНИЕ ОТНОСИТЕЛЬНОЙ ТОЛЩИНЫ ОБОЛОЧКИ

В этом параграфе изучается влияние параметра R/h . Результаты расчетов приведены на рисунках 5.42, 5.43. Выполнены они для жестко заземленной оболочки с характеристиками (5.11)–(5.14). Коэффициенты волнообразования принимались $n = 0$ и $n = 2$.

Отмечены те же тенденции, что и для оболочек канонических форм. Значения частот уменьшаются, а значимость сдвиговых деформаций ослабевает при возрастании параметра R/h . При этом, можно считать, что в рассматриваемом случае влияние сдвиговых деформаций незначительно, поскольку погрешность не превышает 1.5% (рис. 5.42). Уменьшение частот с ростом параметра R/h составило для ω_0 – ω_1 около 3%, для ω_2 около 5%, для ω_3 около 6%, для ω_4 – 7% (рис. 5.43).

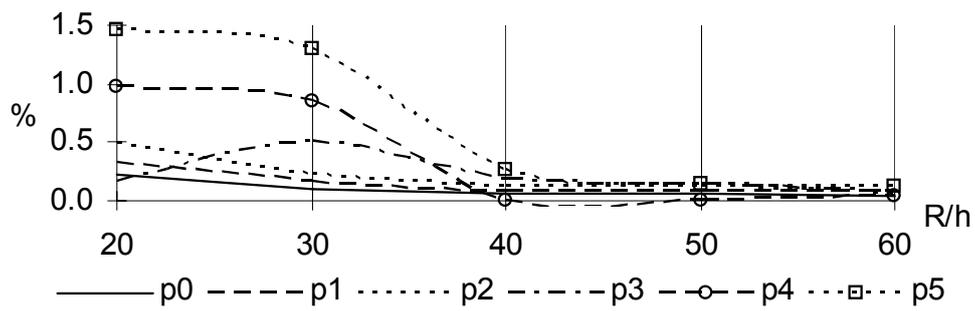


Рис. 5.42. Погрешности p_0 – p_4 , вносимые в расчетные значения собственных частот ω_0 – ω_4 неучетом сдвига, рассматриваемые как функции параметра R/h при $n = 2$.

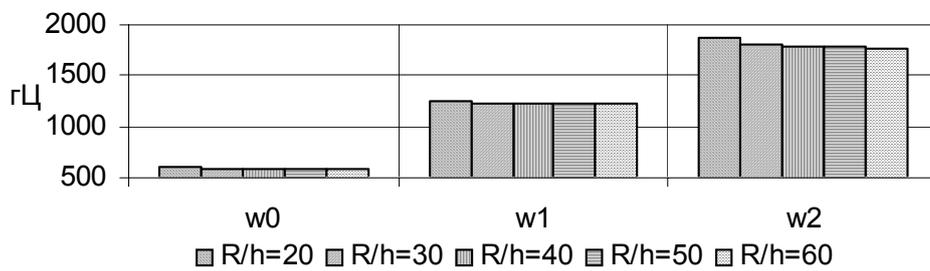


Рис. 5.43. Значения собственных частот ω_0 – ω_4 , рассматриваемые как функции параметра R/h при $n = 2$.

ГЛАВА 6. ДИНАМИЧЕСКАЯ УСТОЙЧИВОСТЬ УПРУГОЙ МНОГОСЛОЙНОЙ КОМПОЗИТНОЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ

В этой главе приведена постановка и решение проблемы динамической устойчивости круговой цилиндрической оболочки, нагруженной осевым вибрационным усилием интенсивности $-(P_0 + P_1 \cos(\theta t))$, где P_0 , P_1 , θ – постоянные величины. Выполнен обширный параметрический анализ, позволяющий оценить влияние сдвиговых деформаций и значимость сил инерции на положение и размеры областей динамической неустойчивости (ОДН).

Как было отмечено во введении (стр. 14–19) проблеме динамической устойчивости посвящен большой объем исследовательских работ. Исторически первой работой по этому вопросу считают статью Н. М. Беляева, опубликованную в 1924 году в [381]. В работе рассматривалась задача о динамической устойчивости прямолинейного стержня, шарнирно опертого по обоим концам, и определялись границы главной ОДН. В 1935 году к этой задаче вновь обращаются Н. М. Крылов и Н. Н. Боголюбов [382], рассматривая общий случай опорных закреплений.

Динамическая устойчивость пластинок, сжатых периодическими продольными силами, рассматривалась в 40-х годах В. А. Боднером (1938), З. И. Халиловым (1942) [383] и Р. Эйнауди (1937). Задачу о динамической устойчивости радиально сжатого кругового кольца впервые в 1940 году исследовали Г. Ю. Джанелидзе и М. А. Радциг. Устойчивость оболочек была рассмотрена А. Н. Марковым (1949) и О. Д. Ониашвили (1950). Вопрос о влиянии затухания на границы ОДН решался А. А. Андроновым и

М. А. Леонтовичем (1927) [39], а позже Э. Меттлером (1941) и К. А. Наумовым (1946).

Все перечисленные исследования характерны тем, что задача динамической устойчивости сводилась к одному дифференциальному уравнению второго порядка с периодическими коэффициентами типа Матье-Хилла [219, 325]. Однако, еще в 1939 году В. Н. Челомей [351] показал, что в общем случае задача динамической устойчивости приводит к системам дифференциальных уравнений второго порядка с периодическими коэффициентами.

Одним из первых авторов, рассматривающих задачу о динамической устойчивости сжатого стержня, как систему двух дифференциальных уравнений, был И. И. Гольденблат (1947) [122, 123]. При построении ОДН он использовал метод разложения по степеням малого параметра. Сходный прием был реализован для плоской формы изгиба Меттлером (1947) и Реклингом (1952), для пластинок – Кухарским (1950), для защемленного стержня – Вейденхаммером (1951).

Метод построения ОДН, не предполагающий малости параметра, предложил В. В. Болотин (1956) [72, 79, 80]. Он исследовал структуру общих уравнений динамической устойчивости, предложил решения задач для стержней, балок, арок, рам, пластинок и оболочек, рассматриваемых и как консервативные, и как диссипативные системы.

Во всех перечисленных работах задача динамической устойчивости понималась в смысле нахождения областей, в пределах которых заданная форма движения становится динамически неустойчивой. Эта же трактовка принята в настоящей главе.

6.1. ПОСТАНОВКА И РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ

6.1.1. ФОРМУЛИРОВКА РАЗРЕШАЮЩЕЙ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ ДИНАМИЧЕСКОЙ УСТОЙЧИВОСТИ УПРУГОЙ МНОГОСЛОЙНОЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ

Рассматривается круговая замкнутая цилиндрическая оболочка, собранная из m упругих армированных слоев постоянной толщины (рис. 2.1). С ее внутренней поверхностью нормально связана цилиндрическая система координат s, φ, z , где s – расстояние, отсчитываемое вдоль образующей от края оболочки ($0 \leq s \leq l$), φ – угловая координата ($0 \leq \varphi \leq 2\pi$), z – поперечная координата, отсчитываемая по направлению внешней нормали ($0 \leq z \leq h$). Параметры Ламе и радиусы кривизны координатных линий определяются по формуле (2.1). Считаем, что направления армирования слоев совпадают с координатными линиями, а интенсивности армирования, как в плоскости слоя ω_l , так и по его высоте ω_z постоянны. Следовательно, жесткостные характеристики каждого слоя остаются постоянными.

Исследуется оболочка (рис. 6.1), нагруженная по торцам равномерно распределенным осевым усилием вибрационного типа с частотой воздействия θ , которое изменяется во времени по следующему закону:

$$T_{ss}|_{s=0,l} = -(P_0 + P_1 \cos \theta t). \quad (6.1)$$

В (6.1) через P_0, P_1 обозначены амплитуды статической и динамической составляющих нагрузки, которые считаются постоянными:

$$P_0 = \text{const}, P_1 = \text{const}.$$

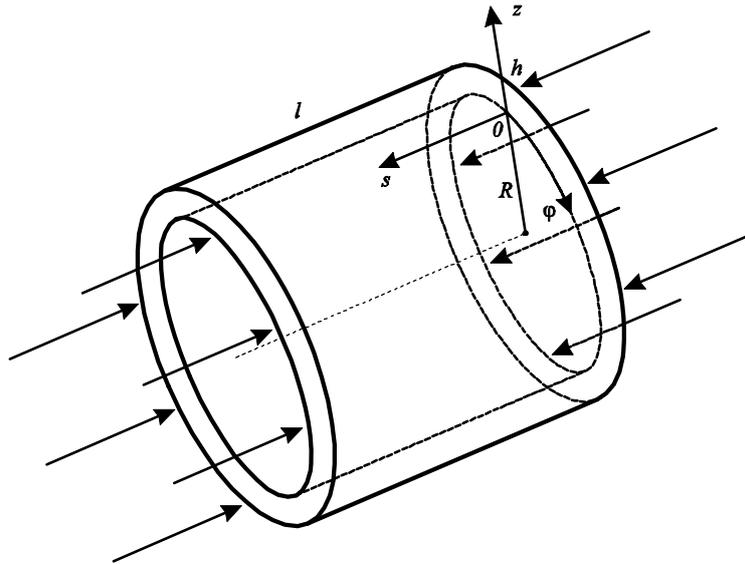


Рис. 6.1. Цилиндрическая оболочка, находящаяся под действием осевого усилия.

Известно [67, 80, 362, 365, 366], что вынужденные осесимметричные колебания, возникающие под действием нагружения (6.1), при определенных сочетаниях параметров P_0 , P_1 , θ могут оказаться неустойчивыми в смысле Ляпунова [158, 231, 355]. То есть, действующей (возмущающей) внешней силой инициируются колебания оболочки, амплитуда которых неограниченно возрастает со временем. Таким образом, поставлена проблема устойчивости осесимметричных колебаний по отношению к неосесимметричным возмущениям.

Целью исследований, представленных в работе, было построение в пространстве параметров P_0 , P_1 , θ областей, соответствующих параметрическому резонансу.

Решение сформулированной проблемы проводилось на основе линеаризованной системы уравнений динамической устойчивости (1.2.30)–(1.2.36), в предположении, что докритическими деформациями $\tilde{u}_s, \tilde{w}, \partial\tilde{w}/\partial s$ допустимо пренебречь. С учетом оговоренных выше условий эту систему составили следующие группы зависимостей (k – номер слоя):

— соотношения упругости, записанные в вариациях компонент тензоров деформаций и перемещений:

$$\sigma_{ss}^{(k)} = a_{11}^{(k)} \varepsilon_{ss}^{(k)} + a_{12}^{(k)} \varepsilon_{\varphi\varphi}^{(k)}, \quad \sigma_{\varphi\varphi}^{(k)} = a_{12}^{(k)} \varepsilon_{ss}^{(k)} + a_{22}^{(k)} \varepsilon_{\varphi\varphi}^{(k)}, \quad (6.3)$$

$$\sigma_{s\varphi}^{(k)} = \sigma_{\varphi s}^{(k)} = a_{33}^{(k)} \varepsilon_{s\varphi}^{(k)}, \quad \tau_{sz}^{(k)} = G_{13}^{(k)} \gamma_{sz}^{(k)}, \quad \tau_{\varphi z}^{(k)} = G_{23}^{(k)} \gamma_{\varphi z}^{(k)}.$$

— закон распределения вариаций физических составляющих вектора перемещения по толщине пакета слоев:

$$v_s^{(k)} = u_s - z \frac{\partial w}{\partial s} + \mu_{11}^{(k)} \pi_s, \quad v_z^{(k)} = w, \quad (6.4)$$

$$v_\varphi^{(k)} = u_\varphi - \frac{z}{R} \frac{\partial w}{\partial \varphi} + \mu_{22}^{(k)} \pi_\varphi.$$

— соотношения между вариациями компонент тензора деформаций и вектора перемещения:

$$\gamma_{sz}^{(k)} = \frac{f'(z) \cdot \pi_s}{G_{13}^{(k)}}, \quad \gamma_{\varphi z}^{(k)} = \frac{f'(z) \cdot \pi_\varphi}{G_{23}^{(k)}}, \quad \varepsilon_{zz}^{(k)} = 0, \quad (6.5)$$

$$\varepsilon_{ss}^{(k)} = \frac{\partial u_s}{\partial s} - z \frac{\partial^2 w}{\partial s^2} + \mu_{11}^{(k)} \frac{\partial \pi_s}{\partial s}, \quad \varepsilon_{\varphi\varphi}^{(k)} = \frac{1}{R} \left(\frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} - z \frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2} + \mu_{22}^{(k)} \frac{\partial \pi_\varphi}{\partial \varphi} + w \right),$$

$$2\varepsilon_{s\varphi}^{(k)} = \frac{\partial u_\varphi}{\partial s} - 2 \frac{z}{R} \frac{\partial^2 w}{\partial s \partial \varphi} + \mu_{22}^{(k)} \frac{\partial \pi_\varphi}{\partial s} + \frac{1}{R} \left(\frac{\partial u_s}{\partial \varphi} + \mu_{22}^{(k)} \frac{\partial \pi_s}{\partial \varphi} \right).$$

— выражение вариаций физических составляющих обобщенных усилий и моментов оболочки через вариации физических составляющих тензора напряжений в ее слоях:

$$[T_{ss}, M_{ss}, S_{ss}] = \sum_{k=1}^m \int_{h_{k-1}}^{h_k} \sigma_{ss}^{(k)} [1, z, \mu_{11}^{(k)}] dz, \quad (6.6)$$

$$[T_{s\varphi}, M_{s\varphi}, S_{s\varphi}, S_{\varphi s}] = \sum_{k=1}^m \int_{h_{k-1}}^{h_k} \sigma_{s\varphi}^{(k)} [1, z, \mu_{22}^{(k)}, \mu_{11}^{(k)}] dz,$$

$$[T_{\varphi\varphi}, M_{\varphi\varphi}, S_{\varphi\varphi}] = \sum_{k=1}^m \int_{h_{k-1}}^{h_k} \sigma_{\varphi\varphi}^{(k)} [1, z, \mu_{22}^{(k)}] dz,$$

$$[Q_s, Q_\varphi] = \sum_{k=1}^m \int_{h_{k-1}}^{h_k} f'(z) \left[\frac{\tau_{sz}^{(k)}}{G_{13}^{(k)}}, \frac{\tau_{\varphi z}^{(k)}}{G_{23}^{(k)}} \right] dz.$$

— вариации даламберовых сил инерции:

$$[\dot{X}_s, \dot{Y}_s, \dot{Z}_s] = \sum_{k=1}^m \int_{h_{k-1}}^{h_k} \rho_k v_s^{(k)} [1, z, \mu_{11}^{(k)}] dz, \quad (6.7)$$

$$[\dot{X}_\varphi, \dot{Y}_\varphi, \dot{Z}_\varphi] = \sum_{k=1}^m \int_{h_{k-1}}^{h_k} \rho_k v_\varphi^{(k)} [1, z, \mu_{22}^{(k)}] dz, \quad \dot{I} = \sum_{k=1}^m \int_{h_{k-1}}^{h_k} \rho_k \dot{w} dz.$$

— линеаризованные уравнения движения, записанные в вариациях:

$$\frac{\partial T_{ss}}{\partial s} + \frac{1}{R} \frac{\partial T_{\varphi s}}{\partial \varphi} = \dot{X}_s, \quad \frac{\partial T_{s\varphi}}{\partial s} + \frac{1}{R} \frac{\partial T_{\varphi\varphi}}{\partial \varphi} - \frac{\tilde{T}_{\varphi\varphi}}{R^2} \left(u_\varphi - \frac{\partial w}{\partial \varphi} \right) = \dot{X}_\varphi, \quad (6.8)$$

$$\begin{aligned} & \frac{T_{\varphi\varphi}}{R} - \frac{\partial^2 M_{ss}}{\partial s^2} - \frac{2}{R} \frac{\partial^2 M_{s\varphi}}{\partial s \partial \varphi} - \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2 M_{\varphi\varphi}}{\partial \varphi^2} - \\ & - \left(\tilde{T}_{ss} \frac{\partial^2 w}{\partial s^2} - \frac{\tilde{T}_{\varphi\varphi}}{R^2} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(u_\varphi - \frac{\partial w}{\partial \varphi} \right) \right) + \dot{I} + \frac{\partial \dot{Y}_s}{\partial s} + \frac{1}{R} \frac{\partial \dot{Y}_\varphi}{\partial \varphi} = 0, \\ & \frac{\partial S_{ss}}{\partial s} + \frac{1}{R} \frac{\partial S_{\varphi s}}{\partial \varphi} - Q_s = \dot{Z}_s, \quad \frac{\partial S_{s\varphi}}{\partial s} + \frac{1}{R} \frac{\partial S_{\varphi\varphi}}{\partial \varphi} - Q_\varphi = \dot{Z}_\varphi. \end{aligned}$$

Закон распределения поперечных деформаций по толщине пакета принят в виде (1.2.3).

Система (6.3)–(6.8), записанная в вариациях $w, u_s, u_\varphi, \pi_s, \pi_\varphi$ обобщенных перемещений, имеет 12-ый порядок и состоит из пяти дифференциальных уравнений. Она замыкается соответствующим числом однородных краевых условий, альтернативно выбираемых из пар (1.2.37). В данной ра-

боте рассматривался случай свободного опирания краев замкнутой оболочки:

$$w|_{s=0,l} = u_\varphi|_{s=0,l} = \pi_\varphi|_{s=0,l} = T_{ss}|_{s=0,l} = M_{ss}|_{s=0,l} = S_{ss}|_{s=0,l} = 0, \quad (6.9)$$

Также, в силу замкнутости контура оболочки, для всех характеристик НДС оболочки должно выполняться требование 2π -периодичности по угловой координате.

С целью записать краевую задачу (6.3)–(6.9) в векторно–матричной форме, введены безразмерные переменные ($i, j = 1, 2$):

$$x = \frac{s}{l}, \delta = \frac{l}{R}, \gamma = \frac{R}{h}, \bar{\rho}_k = \frac{R^2 \rho_k}{E_1^c}, \tilde{T}_{ss} = hE_1^c t_x, \tilde{T}_{\varphi\varphi} = hE_1^c t_\varphi, \quad (6.10)$$

$$y = (y_1, y_2, y_3, y_4, y_5)^T = (w/h, u_s/R, u_\varphi/R, \pi_s h^3 / RE_1^c, \pi_\varphi h^3 / RE_1^c)$$

и приняты обозначения:

$$\beta_i = h_i / h, s_k = E_k^c / E_1^c, t_{ik} = \frac{1}{i+1} (\beta_k^{i+1} - \beta_{k-1}^{i+1}),$$

$$\lambda_{i1} = 0, \lambda_{i,k+1} = \lambda_{ik} + (\beta_k^3 - 1.5\beta_k^2) \cdot \left(\frac{1}{s_k d_{i1}^{(k)}} - \frac{1}{s_{k+1} d_{i1}^{(k+1)}} \right),$$

$$r_{\delta\beta k} = \frac{t_{6,k} - 3t_{5,k} + 2.25t_{4,k}}{s_k^2 d_{\delta 1}^{(k)} d_{\beta 1}^{(k)}} + (t_{3,k} - 1.5t_{2,k}) \cdot \left(\frac{\lambda_{\delta k}}{s_k d_{\beta 1}^{(k)}} + \frac{\lambda_{\beta k}}{s_k d_{\delta 1}^{(k)}} \right) + \lambda_{\delta k} \lambda_{\beta k} t_{0k},$$

$$\bar{r}_{\delta j k} = (t_{3+j,k} - 1.5t_{2+j,k}) / (s_k d_{\delta 1}^{(k)}) + \lambda_{\delta k} t_{jk}.$$

Таким образом, краевая задача (6.3)–(6.9) записывается в виде:

$$A(D_x, D_\varphi) \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + (B(D_x, D_\varphi) + C(D_x, D_\varphi, t_x, t_\varphi)) y = 0, \quad (6.11)$$

$$y_i|_{x=0,x=1} = \frac{\partial^2 y_1}{\partial x^2} \Big|_{x=0,x=1} = \frac{\partial^2 y_j}{\partial x^2} \Big|_{x=0,x=1} = 0, \quad i = 1, 3, 5, \quad j = 2, 4, \quad (6.12)$$

$$y(t, x, \varphi) = y(t, x, \varphi + 2\pi). \quad (6.13)$$

Здесь A, B, C – матрицы 5×5 , элементы которых – полиномы от дифференциальных операторов $D_x = \partial/\partial x$, $D_\varphi = \partial/\partial \varphi$ с постоянными коэффициентами. Ненулевые элементы матриц A, B следующие:

$$\begin{aligned}
a_{11} &= \gamma^2 \sum_{k=1}^m \bar{\rho}_k t_{1k} \frac{\partial}{\partial x}, a_{12} = -\delta \sum_{k=1}^m \bar{\rho}_k t_{0k}, a_{14} = -\delta \sum_{k=1}^m \bar{\rho}_k \bar{r}_{10k}, \quad (6.14) \\
a_{21} &= \gamma^2 \sum_{k=1}^m \bar{\rho}_k t_{1k} \frac{\partial}{\partial \varphi}, a_{23} = a_{12}, a_{25} = -\delta \sum_{k=1}^m \bar{\rho}_k \bar{r}_{20k}, \\
a_{31} &= \sum_{k=1}^m \bar{\rho}_k \left[\gamma^2 t_{2k} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \delta \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right) - \delta^2 t_{0k} \right], a_{32} = -\frac{\delta}{\gamma^2} a_{11}, a_{33} = -\frac{\delta}{\gamma^2} a_{21}, \\
a_{34} &= -\delta \sum_{k=1}^m \bar{\rho}_k \bar{r}_{11k} \frac{\partial}{\partial x}, a_{35} = -\delta^2 \sum_{k=1}^m \bar{\rho}_k \bar{r}_{21k} \frac{\partial}{\partial \varphi}, a_{41} = -\frac{\gamma^2}{\delta} a_{34}, a_{42} = a_{14}, \\
a_{44} &= -\delta \sum_{k=1}^m \bar{\rho}_k r_{11k}, a_{51} = -(\gamma/\delta)^2 a_{35}, a_{53} = a_{25}, a_{55} = -\delta \sum_{k=1}^m \bar{\rho}_k r_{22k}. \\
b_{11} &= \frac{\gamma^2}{\delta^2} \sum_{k=1}^m s_k \left[\frac{\delta^2}{\gamma} b_{12}^{(k)} t_{0k} - t_{1k} \left(b_{11}^{(k)} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \delta^2 (b_{12}^{(k)} + 2b_{33}^{(k)}) \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right) \right] \frac{\partial}{\partial x}, \\
b_{12} &= \frac{1}{\delta} \sum_{k=1}^m s_k t_{0k} \left[b_{11}^{(k)} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \delta^2 b_{33}^{(k)} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right], b_{13} = \frac{\gamma^2}{\delta^2} \sum_{k=1}^m s_k t_{0k} [b_{12}^{(k)} + b_{33}^{(k)}] \frac{\partial^2}{\partial x \partial \varphi}, \\
b_{14} &= \frac{1}{\delta} \sum_{k=1}^m s_k \bar{r}_{10k} \left[b_{11}^{(k)} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \delta^2 b_{33}^{(k)} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right], b_{15} = \sum_{k=1}^m s_k \bar{r}_{20k} [b_{12}^{(k)} + b_{33}^{(k)}] \frac{\partial^2}{\partial x \partial \varphi}, \\
b_{21} &= \frac{\gamma^2}{\delta} \sum_{k=1}^m s_k \left[\frac{\delta^2}{\gamma} b_{22}^{(k)} t_{0k} - t_{1k} \left((b_{12}^{(k)} + 2b_{33}^{(k)}) \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \delta^2 b_{22}^{(k)} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right) \right] \frac{\partial}{\partial \varphi}, b_{22} = b_{13}, \\
b_{23} &= \frac{1}{\delta} \sum_{k=1}^m s_k t_{0k} \left[b_{33}^{(k)} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \delta^2 b_{22}^{(k)} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right], b_{24} = \sum_{k=1}^m s_k \bar{r}_{10k} [b_{12}^{(k)} + b_{33}^{(k)}] \frac{\partial^2}{\partial x \partial \varphi}, \\
b_{25} &= \frac{1}{\delta} \sum_{k=1}^m s_k \bar{r}_{20k} \left[b_{33}^{(k)} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \delta^2 b_{22}^{(k)} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right], b_{31} = -\frac{\gamma^2}{\delta^2} \sum_{k=1}^m s_k b_{11}^{(k)} t_{2k} \frac{\partial^4}{\partial x^4} +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{k=1}^m s_k \left[-\frac{\gamma^2}{\delta^2} t_{2k} \left(2\delta^2 (b_{12}^{(k)} + 2b_{33}^{(k)}) \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial \varphi^2} + \delta^4 b_{22}^{(k)} \frac{\partial^4}{\partial \varphi^4} \right) - \delta^2 b_{22}^{(k)} t_{0k} + \right. \\
& \quad \left. + 2\gamma t_{1k} \left(b_{12}^{(k)} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \delta^2 b_{22}^{(k)} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right) \right], b_{32} = -\frac{\delta}{\gamma^2} b_{11}, b_{33} = -\frac{\delta}{\gamma^2} b_{21}, \\
& b_{34} = -\frac{\delta}{\gamma} \sum_{k=1}^m s_k \left[b_{12}^{(k)} \bar{r}_{10k} - \frac{1}{\delta^2} \bar{r}_{11k} \left(b_{11}^{(k)} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \delta^2 (b_{12}^{(k)} + 2b_{33}^{(k)}) \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right) \right] \frac{\partial}{\partial x}, \\
& b_{35} = -\sum_{k=1}^m s_k \left[\frac{\delta^2}{\gamma} b_{22}^{(k)} \bar{r}_{20k} - \bar{r}_{21k} \left((b_{12}^{(k)} + 2b_{33}^{(k)}) \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \delta^2 b_{22}^{(k)} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right) \right] \frac{\partial}{\partial \varphi}, b_{42} = b_{14}, \\
& b_{43} = b_{24}, b_{44} = \frac{1}{\delta} \sum_{k=1}^m s_k r_{11k} \left[b_{11}^{(k)} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \delta^2 b_{33}^{(k)} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right] - \frac{9\delta}{\gamma^2} \sum_{k=1}^m \frac{t_{4,k} - 2t_{3,k} + t_{2,k}}{s_k d_{11}^{(k)}}, \\
& b_{51} = -\frac{\gamma^2}{\delta} b_{35}, b_{52} = b_{15}, b_{53} = b_{25}, b_{54} = b_{45}, \\
& b_{55} = \frac{1}{\delta} \sum_{k=1}^m s_k r_{22k} \left[b_{33}^{(k)} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \delta^2 b_{22}^{(k)} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right] - \frac{9\delta}{\gamma^2} \sum_{k=1}^m \frac{t_{4,k} - 2t_{3,k} + t_{2,k}}{s_k d_{21}^{(k)}}.
\end{aligned}$$

Ненулевые элементы матрицы параметрических членов C :

$$c_{21} = \delta \gamma t_{\varphi} \frac{\partial}{\partial \varphi}, c_{23} = -\delta t_{\varphi}, c_{31} = t_x \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \delta^2 t_{\varphi} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}, c_{33} = -\frac{\delta^2 t_{\varphi}}{\gamma} \frac{\partial}{\partial \varphi}. \quad (6.15)$$

Отметим, что остается справедливым предельный переход (1.2.12) к уравнениям классической теории оболочек. Соответствующая система может быть получена из (6.11)–(6.13) в результате вычеркивания из матриц A , B , C строк и столбцов с номерами 4, 5. Таким образом, проблема динамической устойчивости в классической постановке описывается краевой задачей для системы, состоящей из трех дифференциальных уравнений в частных производных 8 порядка относительно вариаций компонент вектора перемещений w , u_s , u_{φ} .

6.1.2. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ХАРАКТЕРИСТИК НЕВОЗМУЩЕННОГО ОСЕСИММЕТРИЧНОГО СОСТОЯНИЯ ОБОЛОЧКИ

Как следует из вида матричных коэффициентов (6.14), (6.15) системы динамической устойчивости, для решения поставленной задачи необходимо определить безразмерное осевое и окружное усилия t_x, t_φ (см. (6.10)) основного состояния оболочки, устойчивость которого исследуется.

Определение величин t_x, t_φ – одна из ключевых проблем, возникающих при решении задачи о динамической устойчивости. Она требует интегрирования краевой задачи, описывающей осесимметричные колебания оболочки. В случае геометрически линейной постановки при предположении, что компоненты тензора деформации малы и имеют одинаковый порядок с углами поворота нормали [265], эта система может быть получена в результате линеаризации системы уравнений динамики оболочек (1.2.4)–(1.2.10). Поскольку колебания осесимметричны, то обращаются в нуль как угловая компонента v_φ вектора перемещений, так и все связанные с ней характеристики. Кроме этого, нулевым будет результат дифференцирования по координате φ . С учетом сказанного, систему осесимметричных вынужденных колебаний цилиндрической оболочки составляют следующие группы зависимостей:

— уравнения состояния:

$$\bar{\sigma}_{ss}^{(k)} = a_{11}^{(k)} \bar{\varepsilon}_{ss}^{(k)} + a_{12}^{(k)} \bar{\varepsilon}_{\varphi\varphi}^{(k)}, \bar{\sigma}_{\varphi\varphi}^{(k)} = a_{12}^{(k)} \bar{\varepsilon}_{ss}^{(k)} + a_{22}^{(k)} \bar{\varepsilon}_{\varphi\varphi}^{(k)}, \quad (6.16)$$

$$\bar{\sigma}_{s\varphi}^{(k)} = \bar{\sigma}_{\varphi s}^{(k)} = 0, \bar{\tau}_{sz}^{(k)} = G_{13}^{(k)} \bar{\gamma}_{sz}^{(k)}, \bar{\tau}_{\varphi z}^{(k)} = 0.$$

— закон распределения физических составляющих вектора перемещения по толщине пакета слоев:

$$\bar{v}_s^{(k)} = \bar{u}_s - z \frac{d\bar{w}}{ds} + \mu_{11}^{(k)} \bar{\pi}_s, \bar{v}_\varphi^{(k)} = 0, \bar{v}_z^{(k)} = \bar{w}. \quad (6.17)$$

— соотношения деформации–перемещения:

$$\tilde{\gamma}_{sz}^{(k)} = \frac{f'(z) \cdot \tilde{\pi}_s}{G_{13}^{(k)}}, \tilde{\gamma}_{\varphi z}^{(k)} = 0, \tilde{\varepsilon}_{s\varphi}^{(k)} = 0, \tilde{\varepsilon}_{zz}^{(k)} = 0, \quad (6.18)$$

$$\tilde{\varepsilon}_{ss}^{(k)} = \frac{d\tilde{u}_s}{ds} - z \frac{d^2 \tilde{w}}{ds^2} + \mu_{11}^{(k)} \frac{d\tilde{\pi}_s}{ds}, \tilde{\varepsilon}_{\varphi\varphi}^{(k)} = \frac{\tilde{w}}{R}.$$

— выражение физических составляющих обобщенных усилий и моментов через составляющие тензора напряжений в слоях:

$$[\tilde{T}_{ss}, \tilde{M}_{ss}, \tilde{S}_{ss}] = \sum_{k=1}^m \int_{h_{k-1}}^{h_k} \tilde{\sigma}_{ss}^{(k)} [1, z, \mu_{11}^{(k)}] dz, \quad (6.19)$$

$$\tilde{T}_{\varphi\varphi} = \sum_{k=1}^m \int_{h_{k-1}}^{h_k} \tilde{\sigma}_{\varphi\varphi}^{(k)} dz, \tilde{Q}_s = \sum_{k=1}^m \int_{h_{k-1}}^{h_k} \frac{\tilde{\tau}_{sz}^{(k)} f'(z)}{G_{13}^{(k)}} dz,$$

$$\tilde{T}_{s\varphi} = \tilde{M}_{s\varphi} = \tilde{S}_{s\varphi} = \tilde{Q}_\varphi = 0.$$

— выражения интегральных характеристик даламберовых сил инерции:

$$[\tilde{X}_s, \tilde{Y}_s, \tilde{Z}_s, \tilde{I}] = \sum_{k=1}^m \int_{h_{k-1}}^{h_k} \rho^{(k)} [\ddot{v}_s^{(k)}, z \ddot{v}_s^{(k)}, \mu_{11}^{(k)} \ddot{v}_s^{(k)}, \ddot{w}] dz. \quad (6.20)$$

— выражения для компонент тензора $\mu^{(k)}$:

$$\mu_{\alpha\beta}^{(k)} = \delta_{\alpha\beta} \left\{ \frac{f(z) - f(h_{k-1})}{G_{\alpha 3}^{(k)}} + (1 - \delta_{k1}) \sum_{j=1}^{k-1} \left(\frac{f(h_j) - f(h_{j-1})}{G_{\alpha 3}^{(j)}} \right) \right\}. \quad (6.21)$$

— дифференциальные уравнения движения слоистой оболочки:

$$\frac{d\tilde{T}_{ss}}{ds} = \tilde{X}_s, \frac{d^2 \tilde{M}_{ss}}{ds^2} - \frac{\tilde{T}_{\varphi\varphi}}{R} = \tilde{I} + \frac{d\tilde{Y}_s}{ds}, \frac{d\tilde{S}_{ss}}{ds} - \tilde{Q}_s = \tilde{Z}_s. \quad (6.22)$$

В системе (6.16)–(6.22) приняты обозначения (1.2.28). Эта система, записанная относительно компонент вектора перемещения w , u_s , π_s , состоит из трех дифференциальных уравнений и имеет 8 порядок. В рассматриваемой

мом здесь случае свободного опирания краев соответствующие ей краевые условия принимают вид:

$$\tilde{w}|_{s=0,l} = \tilde{M}_{ss}|_{s=0,l} = \tilde{S}_{ss}|_{s=0,l} = 0, \tilde{T}_{ss}|_{s=0,l} = -(P_0 + P_1 \cos \theta t), \quad (6.23)$$

$$v(t, s, \varphi) = v(t, s, \varphi + 2\pi), \text{ где } v = \{\tilde{w}, \tilde{u}_s, \tilde{\pi}_s\}.$$

В итоге, задача определения характеристик основного состояния оболочки сформулирована в виде краевой задачи (6.16)–(6.23) для линейной системы дифференциальных уравнений с коэффициентами, не зависящими от пространственной переменной x . Ее решение сопряжено с большими трудностями, которых можно избежать, пренебрегая моментностью основного состояния. Это упрощение при исследовании аналогичной задачи используется другими авторами, например [29, 67, 247]. В настоящей работе, определение основного осесимметричного состояния оболочки проводилось на основе системы безмоментных динамических уравнений, состоящей из следующих соотношений [67, 80]:

— уравнения состояния:

$$\tilde{\sigma}_{ss}^{(k)} = a_{11}^{(k)} \frac{d\tilde{u}_s}{ds} + a_{12}^{(k)} \frac{\tilde{w}}{R}, \tilde{\sigma}_{\varphi\varphi}^{(k)} = a_{12}^{(k)} \frac{d\tilde{u}_s}{ds} + a_{22}^{(k)} \frac{\tilde{w}}{R}. \quad (6.24)$$

— соотношения деформации–перемещения:

$$\tilde{\varepsilon}_{ss}^{(k)} = \frac{d\tilde{u}_s}{ds}, \tilde{\varepsilon}_{\varphi\varphi}^{(k)} = \frac{\tilde{w}}{R}, \tilde{\varepsilon}_{s\varphi}^{(k)} = 0, \tilde{\varepsilon}_{zz}^{(k)} = 0, \tilde{\gamma}_{sz}^{(k)} = \tilde{\gamma}_{\varphi z}^{(k)} = 0. \quad (6.25)$$

— выражение физических составляющих обобщенных усилий через составляющие тензора напряжения в слоях оболочки:

$$[\tilde{T}_{ss}, \tilde{T}_{\varphi\varphi}] = \sum_{k=1}^m \int_{h_{k-1}}^{h_k} [\tilde{\sigma}_{ss}^{(k)}, \tilde{\sigma}_{\varphi\varphi}^{(k)}] dz. \quad (6.26)$$

— выражения интегральных характеристик даламберовых сил инерции:

$$[\ddot{X}_s, \ddot{T}] = \sum_{k=1}^m \int_{h_{k-1}}^{h_k} \rho_{(k)} [\ddot{u}_s^{(k)}, \ddot{w}] dz. \quad (6.27)$$

— безмоментные дифференциальные уравнения осесимметричных колебаний слоистой оболочки:

$$\frac{\partial \ddot{T}_{ss}}{\partial s} = \frac{\partial^2 \ddot{X}_s}{\partial t^2}, \quad \frac{\ddot{T}_{\varphi\varphi}}{R} + \frac{\partial^2 \ddot{T}}{\partial t^2} = 0. \quad (6.28)$$

В рассматриваемом здесь случае свободного опирания торцов краевые условия (6.23), с учетом допущения о безмоментности основного состояния, принимают вид:

$$\ddot{T}_{ss}|_{s=0,l} = -(P_0 + P_1 \cos \theta t). \quad (6.29)$$

Вводя обозначения:

$$\ddot{y} = (y_1, y_2)^T = (\ddot{w}/h, \ddot{u}_s/R), \quad P_i = hE_1^c \lambda_i, \quad i = 0, 1, \quad t_{0k} = (h_k - h_{k-1})/h, \quad (6.30)$$

$$b = \sum_{k=1}^m s_k b_{12}^{(k)} t_{0k}, \quad b_1 = \sum_{k=1}^m s_k b_{11}^{(k)} t_{0k}, \quad b_2 = \sum_{k=1}^m s_k b_{22}^{(k)} t_{0k}, \quad a = \sum_{k=1}^m \bar{\rho}_k t_{0k},$$

а также используя (6.10), систему (6.24)–(6.28) записываем в форме

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 y_1}{\partial t^2} = -\frac{1}{\gamma a} \left(\gamma b_2 \cdot y_1 + \frac{b}{\delta} \frac{\partial y_2}{\partial x} \right) \\ \frac{\partial^2 y_2}{\partial t^2} = \frac{1}{\delta a} \frac{\partial}{\partial x} \left(\gamma b \cdot y_1 + \frac{b_1}{\delta} \frac{\partial y_2}{\partial x} \right) \end{cases} \quad (6.31)$$

$$t_x|_{x=0} = t_x|_{x=1} = -(\lambda_0 + \lambda_1 \cos \theta t), \quad \text{где } t_x = \gamma b y_1 + \frac{b_1}{\delta} \frac{\partial y_2}{\partial x}. \quad (6.32)$$

Решение задачи (6.31)–(6.32) ищем в виде

$$\ddot{y}(x, t) = U(x) + V(x) \cos \theta t, \quad (6.33)$$

$$\text{где } U(x) = (u_1, u_2)^T, \quad V(x) = (v_1, v_2)^T.$$

В результате подстановки (6.33) в краевую задачу (6.31)–(6.32) последняя распадается на две системы обыкновенных дифференциальных

уравнений относительно вектор-функций $U(x)$ и $V(x)$ (штрих означает дифференцирование по x):

— относительно $U(x)$:

$$\begin{cases} \gamma b_2 \cdot u_1 + \frac{b}{\delta} u_2' = 0, \\ \frac{\partial}{\partial x} \left(\gamma b \cdot u_1 + \frac{b_1}{\delta} u_2' \right) = 0, \end{cases} \quad \left(\gamma b \cdot u_1 + \frac{b_1}{\delta} u_2' \right) \Big|_{x=0, x=1} = -\lambda_0. \quad (6.34)$$

— относительно $V(x)$:

$$\begin{cases} \gamma b_2 \cdot v_1 + \frac{b}{\delta} v_2' = \gamma a \cdot \theta^2 v_1, \\ \frac{\partial}{\partial x} \left(\gamma b \cdot v_1 + \frac{b_1}{\delta} v_2' \right) = -\delta a \cdot \theta^2 v_2, \end{cases} \quad \left(\gamma b \cdot v_1 + \frac{b_1}{\delta} v_2' \right) \Big|_{x=0, x=1} = -\lambda_1. \quad (6.35)$$

Интегрируя (6.34), (6.35), определяем характеристики основного состояния в следующей форме:

$$\begin{aligned} t_x(x, t) &= \frac{\tilde{T}_{xx}}{hE_1^c} = -\lambda_0 - \left(\frac{1 - \cos \lambda}{\sin \lambda} \sin \lambda x + \cos \lambda x \right) \cdot \lambda_1 \cos \theta t, \quad (6.36) \\ t_\varphi(x, t) &= \frac{\tilde{T}_{\varphi\varphi}}{hE_1^c} = \frac{ba\theta^2}{b_1(b_2 - a\theta^2) - b^2} \left(\frac{1 - \cos \lambda}{\sin \lambda} \sin \lambda x + \cos \lambda x \right) \cdot \lambda_1 \cos \theta t, \\ y_1(x, t) &= \frac{b \cdot \lambda_0}{\gamma(b_1 b_2 - b^2)} + \frac{b \cdot \lambda_1 \cos \theta t}{\gamma(b_1(b_2 - a\theta^2) - b^2)} \left(\frac{1 - \cos \lambda}{\sin \lambda} \sin \lambda x + \cos \lambda x \right), \\ y_2(x, t) &= \frac{\delta b_2(c - x) \cdot \lambda_0}{b_1 b_2 - b^2} + \delta a \lambda \theta^2 \left(\frac{1 - \cos \lambda}{\sin \lambda} \sin \lambda x + \cos \lambda x \right) \cdot \lambda_1 \cos \theta t, \\ \lambda^2 &= \left(\theta^2 \delta^2 a (b_2 - a\theta^2) \right) / \left(b_1 (b_2 - a\theta^2) - b^2 \right). \quad (6.37) \end{aligned}$$

Полученное решение (6.36) согласуется с результатом, приведенным у А. Е. Богдановича [67]. Безмоментное НДС оболочки (6.36) неоднородно вдоль меридиональной координаты x , причем степень этой неоднородности существенно зависит от частоты возмущающей нагрузки θ . Ограни-

чимся тем диапазоном частот, в котором неоднородность оказывается слабой. Для этого, следуя [67], частоту θ сверху подчиняем условию

$$\theta^2 a \ll b_2. \quad (6.38)$$

При выполнении (6.38) имеют место следующие оценки:

$$b_2 - a\theta^2 \approx b_2 \Rightarrow \lambda^2 = \frac{\theta^2 \delta^2 a (b_2 - a\theta^2)}{b_1 (b_2 - a\theta^2) - b^2} \approx \delta^2 \frac{(a\theta^2) b_2}{b_1 b_2 - b^2} \ll \delta^2 \frac{b_2^2}{b_1 b_2 - b^2} \approx \delta^2.$$

Следовательно, если δ – величина порядка 1, то $\lambda \ll 1$ и для любого $x \in [0, 1]$ значение $(\lambda x) \ll 1$, а значит $\cos(\lambda x) \approx 1$, $\sin(\lambda x) \approx 0$. В этом случае, выражения (6.36) принимают вид

$$t_x(x, t) = \frac{\tilde{T}_{xx}}{hE_1^c} \approx -\lambda_0 - \lambda_1 \cos \theta t, \quad (6.39)$$

$$t_\varphi(x, t) = \frac{\tilde{T}_{\varphi\varphi}}{hE_1^c} \approx \left(\frac{ba\theta^2}{b_1 b_2 - b^2} \right) \cdot \lambda_1 \cos \theta t \ll \lambda_1 \cos \theta t.$$

Из представлений (6.39) следует, что амплитуда вибрационной составляющей безразмерного окружного усилия t_φ в рассматриваемом диапазоне частот θ пренебрежимо мала по сравнению с соответствующей амплитудой продольного усилия t_x , что позволяет, в дальнейшем, пренебречь этой величиной.

В заключение, уточним диапазон частот вибрационной нагрузки, переходя в формулах (6.30) к физическим переменным:

$$b_2 = \sum_{k=1}^m s_k b_{22}^{(k)} t_{0k} = \frac{1}{E_1^c} \sum_{k=1}^m a_{22}^{(k)} t_{0k}, \quad a = \sum_{k=1}^m \bar{\rho}_k t_{0k} = \frac{R^2}{E_1^c} \sum_{k=1}^m \rho_k t_{0k} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{b_2}{a} = \frac{1}{R^2} \frac{\sum_{k=1}^m a_{22}^{(k)} t_{0k}}{\sum_{k=1}^m \rho_k t_{0k}} \approx \frac{10^9}{10^3} = 10^6 \Rightarrow \theta^2 \ll \frac{b_2}{a} \approx 10^6.$$

Таким образом, в диапазоне частот $\theta \ll 10^3$ характеристики основного состояния определяем в виде (6.39).

6.1.3. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ГРАНИЦ ОДН С УЧЕТОМ ПОПЕРЕЧНЫХ СДВИГОВЫХ ДЕФОРМАЦИЙ И ВСЕХ ДЕЙСТВУЮЩИХ НА ОБОЛОЧКУ ИНЕРЦИОННЫХ СИЛ

Возвращаемся к краевой задаче (6.11)–(6.13), сформулированной в § 6.1.1. Принятые условия свободного опирания краев оболочки (6.12), как и условия 2π -периодичности (6.13), можно удовлетворить, если решение системы (6.11) строить в виде двойных тригонометрических по пространственным переменным рядов Фурье ($i = 2, 4$):

$$y_1(x, \varphi, t) = \sum_{m,n=1}^{\infty} y_{mn}^1(t) \sin(\pi mx) \cos(n\varphi), \quad (6.40)$$

$$y_i(x, \varphi, t) = \sum_{m,n=1}^{\infty} y_{mn}^i(t) \cos(\pi mx) \cos(n\varphi),$$

$$y_{i+1}(x, \varphi, t) = \sum_{m,n=1}^{\infty} y_{mn}^{i+1}(t) \sin(\pi mx) \sin(n\varphi).$$

Решение в форме (6.40) удовлетворяет краевым условиям (6.12), (6.13), а при подстановке в уравнения системы (6.11) позволяет отделить пространственные переменные x, φ от временной t . В результате, получаем совокупность систем обыкновенных дифференциальных уравнений, распавшихся по индексам m и n :

$$A_{mn} \frac{d^2 y_{mn}}{dt^2} + (B_{mn} - (\lambda_0 + \lambda_1 \cos \theta t) C_{mn}) y_{mn} = 0, \quad (6.41)$$

где A_{mn}, B_{mn}, C_{mn} – матрицы 5×5 , с постоянными коэффициентами, элементы которых несложно получить из соответствующих элементов матриц A, B, C , используя указанные ниже замены:

$$\frac{\partial}{\partial x} \rightarrow \pm \pi m, \frac{\partial^2}{\partial x^2} \rightarrow -(\pi m)^2, \frac{\partial^3}{\partial x^3} \rightarrow \mp (\pi m)^3, \frac{\partial^4}{\partial x^4} \rightarrow (\pi m)^4, \quad (6.42)$$

$$\frac{\partial}{\partial \varphi} \rightarrow \pm n, \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \rightarrow -n^2, \frac{\partial^3}{\partial \varphi^3} \rightarrow \mp n^3, \frac{\partial^4}{\partial \varphi^4} \rightarrow n^4.$$

В (6.42) верхний знак соответствует функции синус, а нижний знак – функции косинус. В результате, задача динамической устойчивости осесимметричного безмоментного состояния (6.39) в диапазоне возмущающих частот (6.38) сведена к исследованию устойчивости тривиального решения матричного уравнения Матье (6.41).

Теория уравнений Матье достаточно хорошо развита (см. [80, 219, 325 и другие]). В перечисленных монографиях сформулированы методы решения полученной задачи, применение которых позволяет решить вопрос об устойчивости тривиального решения уравнения (6.41), следовательно, и первоначальную проблему устойчивости осесимметричного НДС (6.39) композитной цилиндрической оболочки.

6.1.3.1. НЕКОТОРЫЕ СВОЙСТВА УРАВНЕНИЯ МАТЬЕ

Перечислим известные свойства матричного уравнения Матье, используемые в данной работе. Известно [80, 219, 325], что для всякого уравнения вида (уравнение Матье)

$$f'' + (A - B \cos \theta t) f = 0, \quad (6.43)$$

где функция f – n -ый вектор-столбец; A, B – квадратные матрицы порядка n с постоянными коэффициентами; $\cos(\theta t)$ – функция с периодом $T = 2\pi/\theta$, верны следующие утверждения:

1. Если $f(t)$ – какое-либо частное решение уравнения (6.43), то $f(t + T)$ также является его решением.
2. Существуют два линейно независимых решения $f_1(t), f_2(t)$, удовлетворяющие условию

$$f_k(t + T) = \rho_k f_k(t), k = 1, 2, \text{ где } \rho_1 \cdot \rho_2 = 1. \quad (6.44)$$

В (6.44) ρ_1, ρ_2 – корни характеристического уравнения

$$\rho^2 - 2A\rho + 1 = 0,$$

где $A = 0.5(F_1(T) + F_2(T))$ и $\{F_1(t), F_2(t)\}$ – фундаментальная система решений (6.43).

3. Решения (6.44) могут быть представлены в виде

$$f_k(t) = \varphi_k(t) \cdot e^{\frac{t}{T} \ln |\rho_k|}, \varphi_k(t) = \varphi_k(t + T). \quad (6.45)$$

Следовательно, функция $f_k(t)$, определенная по формуле (6.45), с ростом t затухает при $|\rho_k| < 1$, и неограниченно возрастает при $|\rho_k| > 1$. Если же $|\rho_k| = 1$, то решение ограничено во времени и носит периодический характер.

4. Границами, разделяющими области вещественных и комплексных корней, т. е. неограниченно возрастающих и затухающих решений, в силу (6.44), (6.45), могут быть только кратные корни $\rho_k = 1$, $\rho_k = -1$. При $\rho_k = 1$ получаем решения с периодом T , а при $\rho_k = -1$ с периодом $2T$.

5. Два решения одинакового периода ограничивают области неустойчивости, два решения разных периодов – области устойчивости.

6.1.3.2. УРАВНЕНИЯ КРИТИЧЕСКИХ ЧАСТОТ

Построение ОДН цилиндрической оболочки, в силу замечания, сделанного непосредственно перед § 6.1.3.1, привело к исследованию устойчивости тривиального решения матричного уравнения Матье (6.41). Следовательно, опираясь на п. 5 § 6.1.3.1, границы ОДН определяются решениями периодов T и $2T$, где $T = 2\pi/\theta$ – период возмущающей нагрузки (6.1). Методика отыскания таких решений, используемая в данной работе, изложена в [80] и заключается в следующем:

Поскольку существование решений периода T и $2T$ установленный факт, так же как и возможность их разложения в ряды Фурье, то представим эти решения в виде тригонометрических рядов Фурье с векторными коэффициентами:

— решение периода $2T$, т. е. $y_{mn}(t) = y_{mn}(t + 2T)$:

$$y_{mn}(t) = \sum_{k=1,3,\dots}^{\infty} \left(a_k^{mn} \cos \frac{\theta kt}{2} + b_k^{mn} \sin \frac{\theta kt}{2} \right), \quad (6.46)$$

— решение периода T , т. е. $y_{mn}(t) = y_{mn}(t + T)$:

$$y_{mn}(t) = \sum_{k=0,2,\dots}^{\infty} \left(a_k^{mn} \cos \frac{\theta kt}{2} + b_k^{mn} \sin \frac{\theta kt}{2} \right). \quad (6.47)$$

Подставляя (6.46) и (6.47) в уравнение (6.41), и, приравнивая к нулю общие члены каждого полученного ряда Фурье, приходим к четырем бесконечным системам линейных алгебраических уравнений:

— системы при нечетном k ($k = 3, 5, \dots$): (6.48)

$$\begin{cases} \left(-\frac{\theta^2}{4} A_{mn} + B_{mn} - (\lambda_0 + \frac{1}{2}\lambda_1) C_{mn} \right) a_1^{mn} - \frac{1}{2}\lambda_1 C_{mn} a_3^{mn} = 0, \\ -\frac{1}{2}\lambda_1 C_{mn} a_{k-2}^{mn} + \left(-\frac{\theta^2 k^2}{4} A_{mn} + B_{mn} + \lambda_0 C_{mn} \right) a_k^{mn} - \frac{1}{2}\lambda_1 C_{mn} a_{k+2}^{mn} = 0; \\ \left(-\frac{\theta^2}{4} A_{mn} + B_{mn} - (\lambda_0 - \frac{1}{2}\lambda_1) C_{mn} \right) b_1^{mn} - \frac{1}{2}\lambda_1 C_{mn} b_3^{mn} = 0, \\ -\frac{1}{2}\lambda_1 C_{mn} b_{k-2}^{mn} + \left(-\frac{\theta^2 k^2}{4} A_{mn} + B_{mn} + \lambda_0 C_{mn} \right) b_k^{mn} - \frac{1}{2}\lambda_1 C_{mn} b_{k+2}^{mn} = 0. \end{cases}$$

— системы при четном k ($k = 4, 6, \dots$): (6.49)

$$\begin{cases} (B_{mn} - \lambda_0 C_{mn}) a_0^{mn} - \frac{1}{2}\lambda_1 C_{mn} a_2^{mn} = 0, \\ -\lambda_1 C_{mn} a_0^{mn} + \left(-\theta^2 A_{mn} + (B_{mn} - \lambda_0 C_{mn}) \right) a_2^{mn} - \frac{1}{2}\lambda_1 C_{mn} a_4^{mn} = 0, \\ -\frac{1}{2}\lambda_1 C_{mn} a_{k-2}^{mn} + \left(-\frac{\theta^2 k^2}{4} A_{mn} + (B_{mn} - \lambda_0 C_{mn}) \right) a_k^{mn} - \frac{1}{2}\lambda_1 C_{mn} a_{k+2}^{mn} = 0; \\ \left(-\theta^2 A_{mn} + (B_{mn} - \lambda_0 C_{mn}) \right) b_2^{mn} - \frac{1}{2}\lambda_1 C_{mn} b_4^{mn} = 0, \\ -\frac{1}{2}\lambda_1 C_{mn} b_{k-2}^{mn} + \left(-\frac{\theta^2 k^2}{4} A_{mn} + (B_{mn} - \lambda_0 C_{mn}) \right) b_k^{mn} - \frac{1}{2}\lambda_1 C_{mn} b_{k+2}^{mn} = 0. \end{cases}$$

Из (6.48), (6.49) очевидно, что получены линейные однородные алгебраические системы бесконечного порядка относительно коэффициентов рядов (6.46), (6.47). Условие существования нетривиального решения таких систем заключается в равенстве нулю определителей, составленных из их коэффициентов [188]. Таким образом, получаем четыре бесконечных определителя Хилла или, по терминологии [80], уравнения критических частот (под критическими понимаются частоты внешней нагрузки, соответствующие границам областей неустойчивости):

$$\det(\Lambda_i^{mn} - \theta^2 \Omega_i^{mn}) = 0, i = 1, \dots, 4. \quad (6.50)$$

Матрицы Λ , Ω имеют блочно-диагональную структуру, сформированную из матриц размера 5×5 , в силу (6.41) и (6.48), (6.49). Вид Λ , Ω следующий:

— при нечетном k из систем (6.48):

$$\Lambda_{1,2}^{mn} = \begin{pmatrix} B_{mn} - \lambda_0 C_{mn} \pm \frac{\lambda_1}{2} C_{mn} & -\frac{\lambda_1}{2} C_{mn} & 0 & \dots \\ -\frac{\lambda_1}{2} C_{mn} & B_{mn} - \lambda_0 C_{mn} & -\frac{\lambda_1}{2} C_{mn} & \dots \\ 0 & -\frac{\lambda_1}{2} C_{mn} & B_{mn} - \lambda_0 C_{mn} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix},$$

$$\Omega_{1,2}^{mn} = \frac{1}{4} \text{diag} \left((2i-1)^2 A_{mn} \right)_{i=1}^{\infty}.$$

— при четном k из систем (6.49):

$$\Lambda_3^{mn} = \begin{pmatrix} B_{mn} - \lambda_0 C_{mn} - \frac{\lambda_1^2}{4} C_{mn} (B_{mn} - \lambda_0 C_{mn})^{-1} C_{mn} & -\frac{\lambda_1}{2} C_{mn} & \dots \\ -\frac{\lambda_1}{2} C_{mn} & B_{mn} - \lambda_0 C_{mn} & \dots \\ 0 & -\frac{\lambda_1}{2} C_{mn} & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix},$$

$$\Lambda_4^{mn} = \begin{pmatrix} B_{mn} - \lambda_0 C_{mn} & -\frac{\lambda_1}{2} C_{mn} & 0 & \dots \\ -\frac{\lambda_1}{2} C_{mn} & B_{mn} - \lambda_0 C_{mn} & -\frac{\lambda_1}{2} C_{mn} & \dots \\ 0 & -\frac{\lambda_1}{2} C_{mn} & B_{mn} - \lambda_0 C_{mn} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix},$$

$$\Omega_{3,4}^{mn} = \text{diag} \left(i^2 A_{mn} \right)_{i=1}^{\infty}.$$

Полученные уравнения критических частот (6.50) записаны в виде бесконечных определителей, что ставит вопрос об их сходимости [80, 247]. Решение этой проблемы в случае скалярного уравнения Матье приведено В. В. Болотиным в [80]. Им показано, что (6.50) соответствующие этому случаю определители являются нормальными, следовательно, относятся к классу сходящихся. Как известно, нормальным считают определитель вида

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 + c_{11} & c_{12} & c_{13} & \dots \\ c_{21} & 1 + c_{22} & c_{23} & \dots \\ c_{31} & c_{32} & 1 + c_{33} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{vmatrix} \quad (6.51)$$

при условии абсолютной сходимости двойного ряда

$$\sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} c_{ij}. \quad (6.52)$$

Покажем, что и в случае векторного уравнения Матье (6.41) уравнения (6.50) так же определители нормального типа. Учтем, что отбрасывание или добавление конечного числа слагаемых ряда не влияет на его сходимость, а также, что знакопостоянный ряд допускает перестановку слагаемых, и рассмотрим следующий определитель:

$$\det(\Lambda - \theta^2 \Omega) = 0,$$

$$\Lambda = \begin{pmatrix} B_{mn} - \lambda_0 C_{mn} & -\frac{\lambda_1}{2} C_{mn} & 0 & \dots \\ -\frac{\lambda_1}{2} C_{mn} & B_{mn} - \lambda_0 C_{mn} & -\frac{\lambda_1}{2} C_{mn} & \dots \\ 0 & -\frac{\lambda_1}{2} C_{mn} & \dots & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}, \Omega = \text{diag} \left(\left(\frac{i}{2} \right)^2 A_{mn} \right)_{i=1}^{\infty}.$$

Очевидно, что матрицы $\Lambda_{1,2,3,4}$ без учета первых пяти строк и столбцов совпадают с матрицей Λ ; нечетные блоки матрицы Ω составлены из матриц $\Omega_{1,2}$, а четные блоки из $\Omega_{3,4}$. Вводя в рассмотрение матрицу A_θ , определив ее по формуле

$$A_\theta = \begin{pmatrix} \frac{4}{\theta^2} A_{mn}^{-1} & 0 & \dots \\ 0 & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix},$$

и, учитывая, что $\det(A_\theta \cdot (\Lambda - \theta^2 \Omega)) = \det A_\theta \cdot \det(\Lambda - \theta^2 \Omega)$ доказательство сходимости (6.50) сводится к доказательству сходимости $\det(A_\theta \cdot (\Lambda - \theta^2 \Omega))$. Таким образом, рассматриваем определитель

$$\Delta = \begin{vmatrix} M - E & N & 0 & \dots \\ N & M - 4E & N & \dots \\ 0 & N & M - 9E & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{vmatrix}, \quad (6.53)$$

$$M = \frac{4}{\theta^2} A_{mn}^{-1} (B_{mn} - \lambda_0 C_{mn}), N = -\frac{2\lambda_1}{\theta^2} A_{mn}^{-1} C_{mn}.$$

Из каждой строки k -го блока, следуя [80], вынесем множитель $(-k^2)$ и перейдем к определителю

$$\Delta_1 = \det(d_{ij}) = \begin{vmatrix} \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \\ \dots & -\frac{1}{k^2} N & E - \frac{1}{k^2} M & -\frac{1}{k^2} N & \dots \\ \dots & 0 & -\frac{1}{(k+1)^2} N & E - \frac{1}{(k+1)^2} M & \dots \\ \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{vmatrix}. \quad (6.54)$$

Здесь матрицы M, N – матрицы порядка 5×5 , элементы которых выражаются через элементы матриц A_{mn}, B_{mn}, C_{mn} по формулам (6.53) и не за-

висят от k . Обозначим элементы этих матриц m_{ij} , n_{ij} соответственно. Из (6.51), (6.52) следует, что для сходимости (6.54) достаточно показать, что абсолютно сходится ряд

$$\sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} d_{ij} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \cdot \left(\sum_{i,j=1}^5 \{2|n_{ij}| + |m_{ij}|\} \right) = D \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}, D = \left(\sum_{i,j=1}^5 \{2|n_{ij}| + |m_{ij}|\} \right).$$

Из последнего равенства следует, что определитель (6.53), а, следовательно, и определители (6.50), относятся к классу нормальных определителей и являются сходящимися.

Таким образом, определение возмущающих частот, соответствующих границам ОДН, приводит к решению обобщенной проблемы собственных значений (6.50).

Практическая реализации этой проблемы осуществлялась методом редукции [175], согласно которому решение строится как предел последовательности конечномерных задач порядка $5N$, при $N \rightarrow \infty$. Критерием завершения процесса служит стабилизация расчетных значений исследуемого участка спектра. Численное исследование скорости сходимости показало, что для определения первых трех областей достаточно положить $N = 3$.

Следует отметить, что уравнение критических частот в форме (6.50) открывает возможность построения наперед заданного количества ОДН. В данной работе использована традиционная нумерация ОДН, при которой номер области совпадает с номером коэффициента k в представлениях (6.46), (6.47) (определяется периодом решения, соответствующего границам ОДН).

6.2. НЕКОТОРЫЕ ПРЕДЕЛЬНЫЕ ФОРМЫ ЗАДАЧИ О ДИНАМИЧЕСКОЙ УСТОЙЧИВОСТИ: ЗАДАЧА О СВОБОДНЫХ КОЛЕБАНИЯХ. ЗАДАЧА О СТАТИЧЕСКОЙ УСТОЙЧИВОСТИ

Возвращаясь к матричному уравнению (6.41), опишем предельные переходы, которые были использованы при построении ОДН. Система (6.41) имеет вид

$$A_{mn} \frac{d^2 y_{mn}}{dt^2} + (B_{mn} - (\lambda_0 + \lambda_1 \cos \theta t) C_{mn}) y_{mn} = 0,$$

где λ_0, λ_1 – безразмерные параметры (амплитуды) нагрузки, введенные формулами (6.30). Отметим следующее:

1. Полагая $\lambda_0 = \lambda_1 = 0$, и, выполняя переход $\partial^2/\partial t^2 \rightarrow -\omega^2$, получаем систему

$$(B_{mn} - \omega^2 A_{mn}) y_{mn} = 0, \quad (6.55)$$

решения которой определяют спектр собственных частот ω и форм собственных колебаний оболочки. Подобные задачи решались в предыдущих главах.

2. Полагая $\lambda_1 = 0$ и принимая $\partial^2/\partial t^2 = 0$, получаем систему

$$(B_{mn} - \lambda^* C_{mn}) y_{mn} = 0, \quad (6.56)$$

решения которой формируют спектр статических критических усилий λ^* и форм потери устойчивости (см. [30]).

6.3. ЧАСТНЫЕ ФОРМЫ ЗАДАЧИ О ДИНАМИЧЕСКОЙ УСТОЙЧИВОСТИ

В этом параграфе сформулированы дополнительные условия, упрощающие решаемую задачу. В дальнейшем, оценено их влияние на расположение и размер ОДН.

6.3.1. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ОДН С УЧЕТОМ ЛИШЬ ИНЕРЦИИ ПРОГИБА

Следует отметить, что пренебрегая в системе (6.41) тангенциальными инерционными силами, инерцией вращения, инерцией сдвига, и, сохраняя только инерцию прогиба, получаем одно дифференциальное уравнение типа Матье. Действительно, в этом случае, все элементы матрицы A_{mn} , так же как и элементы матрицы A (6.11), обращаются в нуль за исключением элемента a_{31} (см. (6.14)), который определяется равенством

$$a_{31} = -\delta^2 \sum_{k=1}^m \bar{\rho}_k t_{0k}.$$

В силу этого, все уравнения системы (6.41) за исключением третьего становятся однородными линейными алгебраическими уравнениями относительно вектор-функции y . Это позволяет, получить одно разрешающее дифференциальное уравнение типа Матье относительно безразмерного прогиба, т.е. $y_1 = w/h$. Аналогичная постановка использована, например, А. Е. Богдановичем [67].

Таким образом, задача о динамической устойчивости, решаемая в предположении, что всеми инерционными силами можно пренебречь по сравнению с инерцией прогиба, сведена к одному уравнению Матье:

$$\frac{d^2 y_{mn}}{dt^2} + \frac{1}{a} (b_{mn} - (\lambda_0 + \lambda_1 \cos \theta t) c_{mn}) y_{mn} = 0, \quad (6.57)$$

Приведем выражение коэффициентов уравнения (6.57), которые с учетом (6.42) определяются через элементы матриц A_{mn} , B_{mn} , C_{mn} , заданных формулами (6.14), (6.15):

$$a = -a_{31} = \delta^2 \sum_{k=1}^m \bar{\rho}_k t_{0k}, c_{mn} = (\pi m)^2, \quad (6.58)$$

$$b_{mn} = (b_{32} \quad b_{33} \quad b_{34} \quad b_{35}) \cdot \begin{pmatrix} b_{12} & b_{13} & b_{14} & b_{15} \\ b_{22} & b_{23} & b_{24} & b_{25} \\ b_{42} & b_{43} & b_{44} & b_{45} \\ b_{52} & b_{53} & b_{54} & b_{55} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ b_{41} \\ b_{51} \end{pmatrix}.$$

В этом случае выражение собственной частоты колебаний ненагруженной оболочки (6.55) и интенсивность статической критической нагрузки (6.56) определяются по формулам

$$\omega_{mn}^2 = \frac{b_{mn}}{a}, \lambda_{mn}^* = \frac{b_{mn}}{c_{mn}}. \quad (6.59)$$

Уравнение критических частот (6.50) переписывается с учетом следующих переходов:

$$A_{mn} \rightarrow 1, B_{mn} \rightarrow \frac{b_{mn}}{a}, C_{mn} \rightarrow \frac{c_{mn}}{a}. \quad (6.60)$$

6.3.2. ПОСТРОЕНИЕ ОДН С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ПРИБЛИЖЕННЫХ ФОРМУЛ В. В. БОЛОТИНА

Перепишем уравнение Матъе, используя зависимости (6.59), и, вводя относительные параметры нагрузки

$$(\lambda_0^*, \lambda_1^*) = (\lambda_0/\lambda^*, \lambda_1/\lambda^*), \quad 0 \leq \lambda_0^*, \lambda_1^* < 1, \quad (6.61)$$

В принятых обозначениях уравнение (6.57) записывается в виде (коэффициенты m, n фиксируем и опускаем):

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + \omega^2 \left(1 - (\lambda_0^* + \lambda_1^* \cos \theta t) \right) y = 0. \quad (6.62)$$

С целью сравнения полученных в работе результатов с уже известными [67, 80], приведем приближенные формулы Болотина [80] для уравнения Матъе (6.61). Первые три ОДН определяются в пространстве параметров $(\lambda_0^*, \lambda_1^*, \theta)$ неравенствами вида:

— главная (первая) ОДН:

$$2\sqrt{1-\lambda_0^* - 0.5\lambda_1^*} < \frac{\theta}{\omega} < 2\sqrt{1-\lambda_0^* + 0.5\lambda_1^*}; \quad (6.63.1)$$

— вторая ОДН:

$$\sqrt{1-\lambda_0^* - \frac{(\lambda_1^*)^2}{2(1-\lambda_0^*)}} < \frac{\theta}{\omega} < \sqrt{1-\lambda_0^* + \frac{(\lambda_1^*)^2}{12(1-\lambda_0^*)}}; \quad (6.63.2)$$

— третья ОДН:

$$\frac{2}{3}\sqrt{1-\lambda_0^* - \frac{9(\lambda_1^*)^2}{32(1-\lambda_0^*)-18\lambda_1^*}} < \frac{\theta}{\omega} < \frac{2}{3}\sqrt{1-\lambda_0^* - \frac{9(\lambda_1^*)^2}{32(1-\lambda_0^*)+18\lambda_1^*}}. \quad (6.63.3)$$

Здесь ω – частота собственных колебаний ненагруженной оболочки, определяемая по (6.59).

6.4. ПАРАМЕТРИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ ПОЛОЖЕНИЯ И РАЗМЕРОВ ОДН

В этом параграфе приведены результаты исследования влияния физико-геометрических характеристик цилиндрической оболочки на расположение и размер первых трех ОДН. Также проанализирована возможность принятия дополнительных условий, упрощающих построение ОДН.

6.4.1. ОПИСАНИЕ ПРИНЯТЫХ ПРИ ПОСТРОЕНИИ ОДН ПАРАМЕТРОВ ОБОЛОЧКИ

Результаты численных расчетов границ ОДН, представленные ниже, проводились в каждом из следующих случаев:

- (А): с учетом всех инерционных слагаемых и сдвиговых деформаций, т. е. по формулам (6.50) для системы (6.41) относительно вектора $y = (y_1, y_2, y_3, y_4, y_5)$;
- (В): с учетом всех инерционных слагаемых и без учета сдвиговых деформаций, т. е. по формулам (6.50) для системы (6.41) относительно вектора $y = (y_1, y_2, y_3)$;

- (С): с учетом лишь инерции прогиба и сдвиговых деформаций, т. е. по формулам (6.50) для уравнения (6.57) относительно $y = (y_1)$;
- (D): с учетом лишь инерции прогиба по приближенным формулам В. В. Болотина (6.63) для уравнения (6.62).

Области выстроены на плоскости (λ, θ) при фиксированном λ_0 , где $\lambda = \lambda_1 \cdot E_c^1 \cdot 10^{-8}$ при условии $\lambda_0 + \lambda_1 \leq 0.95\lambda^*$. Рассчитывалось отношение площадей: площади, занимаемой ОДН, к площади наименьшего прямоугольника, определяемого координатными осями и правой верхней граничной точкой главной области неустойчивости.

Расчеты проводились для трехслойной композитной оболочки симметричного строения, армированной по одному из типов:

(о.м.о): несущие слои армированы в окружном направлении, а наполнитель – в меридиональном; (6.64.1)

(м.о.м): несущие слои армированы в меридиональном направлении, а наполнитель – в окружном. (6.64.2)

Рассматривалась жестко заземленная оболочка со следующими значениями параметров:

— геометрические:

$$R/h = 10, l/R = 2, h_1 - h_0 = h_3 - h_2 = 0.3h, h_2 - h_1 = 0.4h \quad (6.65)$$

— механические:

$$E_k^c = 3 \cdot 10^9 \text{ Па}, E_k^a = 25 \cdot 10^{10} \text{ Па}, \nu_k^c = \nu_k^a = 0.3, \quad (6.66)$$

$$\rho_k^c = 1250 \text{ кг/м}^3, \rho_k^a = 1710 \text{ кг/м}^3$$

— структурные:

$$\omega_{l,k} = \omega_{z,k} = 0.5. \quad (6.67)$$

Построенные и исследованные ОДН соответствуют тем коэффициентам волнообразования m, n , при которых достигается минимум низшей собственной частоты рассматриваемой оболочки.

6.4.2. ВЛИЯНИЕ УЧЕТА СДВИГОВЫХ ДЕФОРМАЦИЙ НА ПОЛОЖЕНИЕ И РАЗМЕРЫ ПЕРВЫХ ТРЕХ ОДН

В этом параграфе исследовано значение погрешности, вносимой неучетом поперечных сдвиговых деформаций, при построении первых трех ОДН. Расчеты проводились на основе группы (А) и (В).

Проведено варьирование параметров R/h , l/R , h_k/h , а также типа и интенсивности армирования. В результате, относительно положения и площади (см. § 6.4.1), занимаемой первыми тремя ОДН, сделан следующий вывод (иллюстрация представлена на рисунках 6.2–6.4):

1. Для оболочек с $R/h > 10$, $l/R > 2$ в подавляющем большинстве случаев погрешность при расчете относительной площади ОДН составляет менее 1–2%.

2. Деформация сдвига существенно влияет на положение областей. Происходит смещение вершин ОДН вдоль оси θ . Погрешность при расчете вершины области совпадает (очевидно, в силу метода построения) с погрешностью от неучета сдвига при вычислении низшей собственной частоты. Этот же факт отмечен в монографии [67].

На рисунках 6.2–6.4 ОДН построены на плоскости $\lambda_0 = 0$, для жестко защемленной оболочки со значениями параметров (6.65)–(6.67). Исключение сделано на рис. 6.4 где $R/h = 30$. При этом на рис. 6.2 и 6.4 пакет армирован по типу (6.64.1), а на рисунке 6.3 – по типу (м.о.м), т.е. (6.64.2).

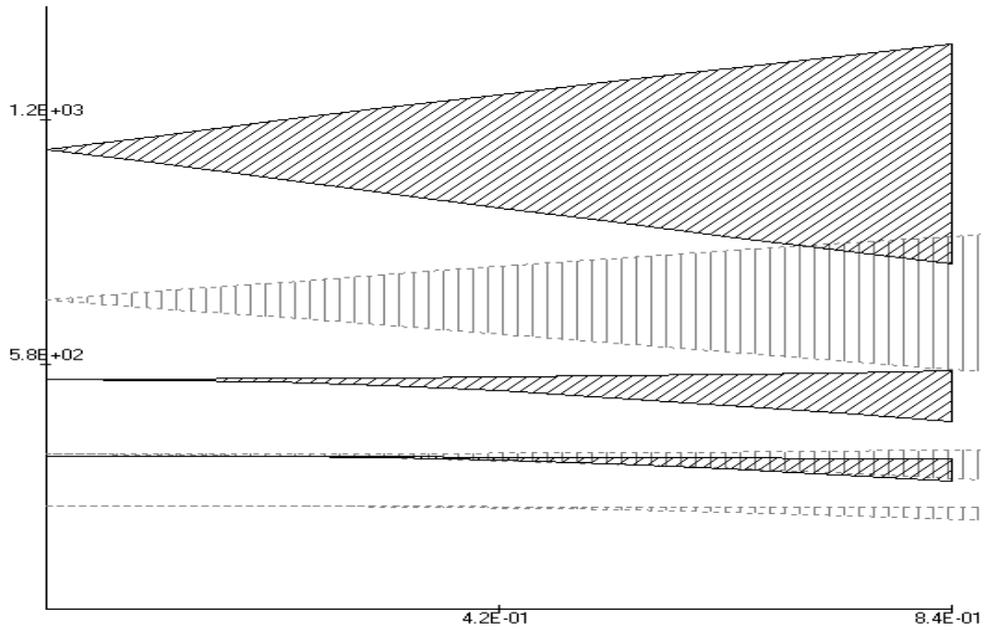


Рис. 6.2. Первые три ОДН. Области с вертикальной штриховкой соответствуют (А), с диагональной – (В). Параметры: $R/h = 10$, $l/R = 2$, Th343 при (о.м.о). Плоскость $\lambda_0 = 0$ или $(\lambda_1 E^c_1 \cdot 10^{-8}, \theta)$.
 Погрешности и параметры области: $p_\omega = 30\%$, $p_S < 1\%$, $S_{\text{ОДН}} = 24\%$.

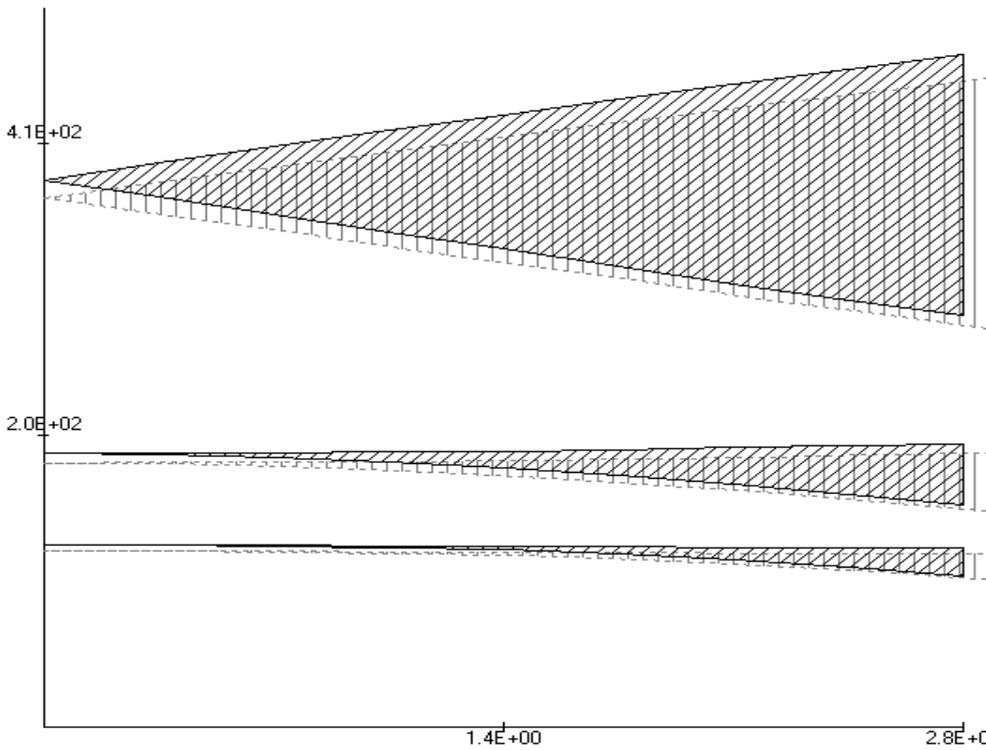


Рис. 6.3. Первые три ОДН. Области с вертикальной штриховкой соответствуют (А), с диагональной – (В). Параметры: $R/h = 10$, $l/R = 2$, Th343 при (м.о.м). Плоскость $\lambda_0 = 0$ или $(\lambda_1 E^c_1 \cdot 10^{-8}, \theta)$.
 Погрешности и параметры области: $p_\omega = 2\%$, $p_S < 1\%$, $S_{\text{ОДН}} = 24\%$.

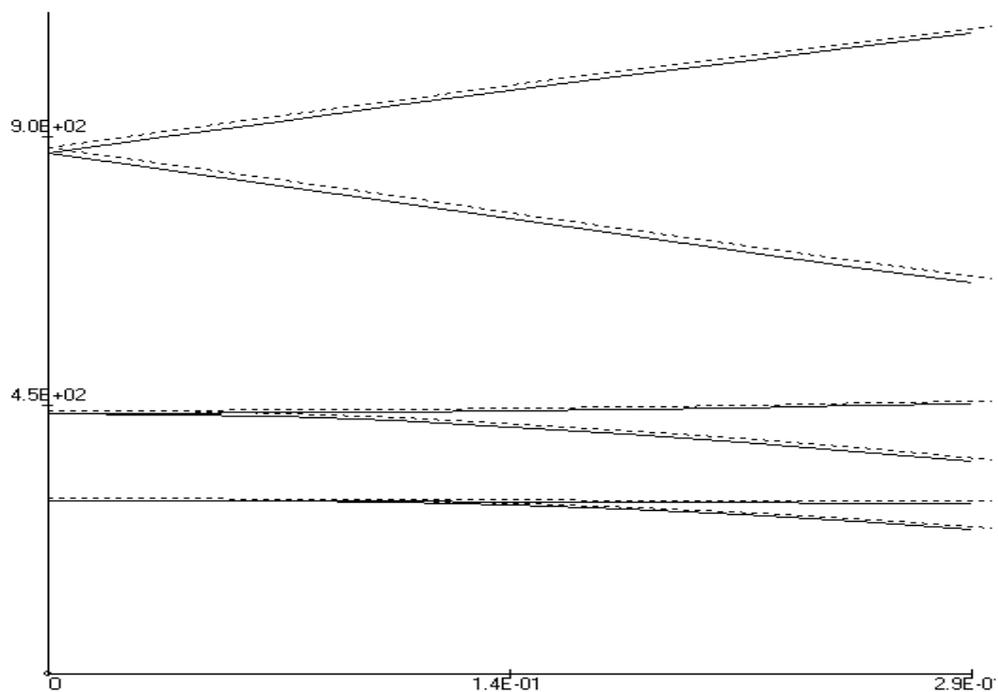


Рис. 6.4. Границы первых трех ОДН. Пунктирные границы соответствуют (В), сплошные – (А).
 Параметры: $R/h = 30$, $l/R = 2$, Th343 при (о.м.о). Плоскость $\lambda_0 = 0$ или $(\lambda_1 E^c \cdot 10^{-8}, \theta)$.
 Погрешности и параметры области: $p_\omega = 1\%$, $p_S < 1\%$, $S_{\text{ОДН}} = 24\%$.

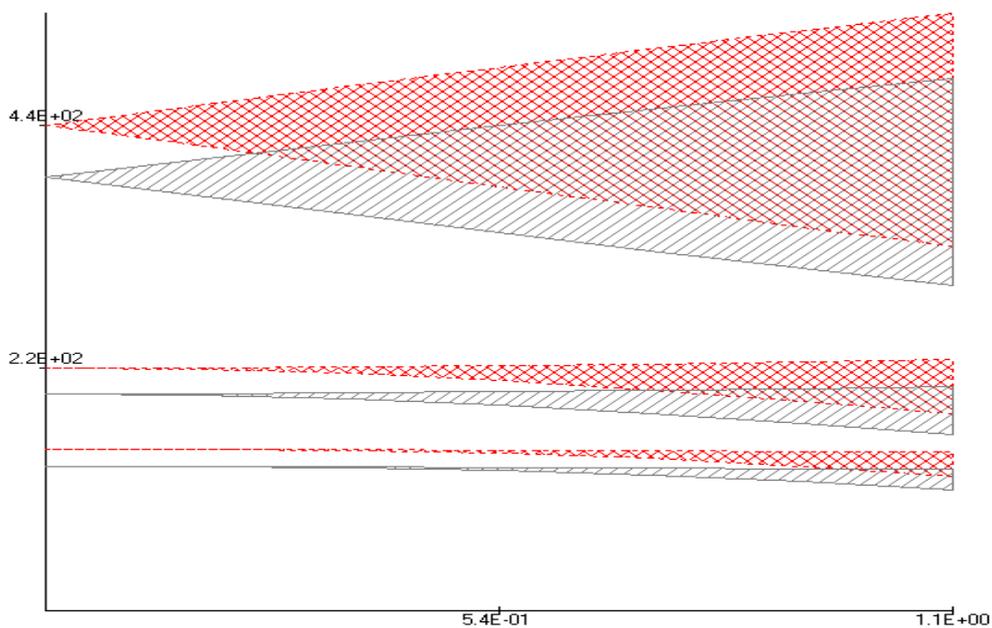


Рис. 6.5. Первые три ОДН. Области с клеточной штриховкой соответствуют (С), с диагональной – (А).
 Параметры: $R/h = 10$, $l/R = 2$, Th181 при (о.м.о). Плоскость $\lambda_0 = 0$ или $(\lambda_1 E^c \cdot 10^{-8}, \theta)$.
 Погрешности и параметры области: $p_\omega = 12\%$, $p_S < 1\%$, $S_{\text{ОДН}} = 24\%$.

6.4.3. ВЛИЯНИЕ УЧЕТА ИНЕРЦИОННЫХ СИЛ НА ПОЛОЖЕНИЕ И РАЗМЕРЫ ПЕРВЫХ ТРЕХ ОДН

Проанализирована погрешность, вносимая в расчетные параметры ОДН пренебрежением всех инерционных сил за исключением инерции прогиба. В данном случае, при построении ОДН использовались группы соотношений (А) и (С).

Исследования показали, что в широком диапазоне физико-механических и геометрических характеристик цилиндрической оболочки относительная площадь каждой из ОДН изменяется менее, чем на 3%. Отмечено, что изучаемая погрешность возрастает при увеличении амплитуды статической составляющей нагрузки, т.е. с ростом λ_0 . На рисунках 6.5, 6.6 представлены ОДН, выстроенные на плоскости $\lambda_0 = 0$ и $\lambda_0 = 2\lambda^*/3$ соответственно, для оболочек с армирование (о.м.о) и параметрами (6.65)–(6.67) где $h_1 - h_0 = h_3 - h_2 = 0.1h$, $h_2 - h_1 = 0.8h$, т. е. Th181.

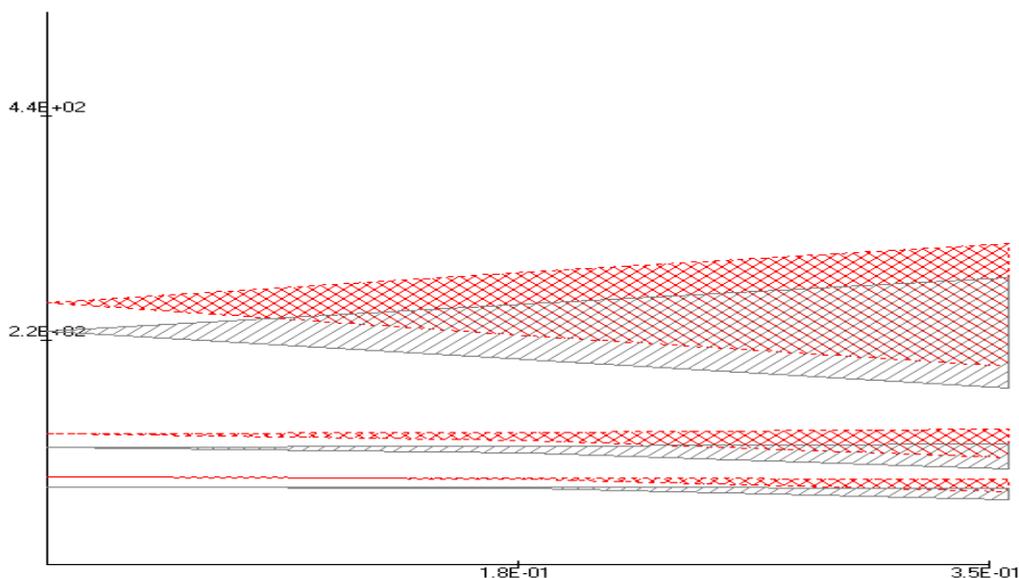


Рис. 6.6. Первые три ОДН. Области с клеточной штриховкой соответствуют (С), с диагональной – (А). Параметры: $R/h = 10$, $l/R = 2$, Th181 при (о.м.о). Плоскость $\lambda_0 = 2\lambda^*/3$ или $(\lambda_1 E^c_1 \cdot 10^{-8}, \theta)$.
Погрешности и параметры области: $p_o = 12\%$, $p_s = 4\%$, $S_{\text{ОДН}} = 55\%$.

6.4.4. СРАВНЕНИЕ ОДН, ПОСТРОЕННЫХ ПО ПРИБЛИЖЕННЫМ ФОРМУЛАМ В. В. БОЛОТИНА, С ОБЛАСТЯМИ, ПОЛУЧЕННЫМИ НА ОСНОВЕ НЕКЛАССИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ ДИНАМИЧЕСКОЙ УСТОЙЧИВОСТИ

В заключение, проведено сравнение ОДН, при расчете границ которых использованы группы формул (А) и (D). При анализе результатов варьирования параметров цилиндрической оболочки выявлены общие тенденции:

1. На плоскости $\lambda_0 = 0$ погрешности при определении площадей первых трех областей составляют около 5%, 30% и 50% соответственно ($\pm 2-3\%$).

2. При увеличении амплитуды статической составляющей нагрузки погрешность при расчете главной области уменьшается до 1–3%, при расчете второй области сохраняется на уровне 25–35%, для третьей возрастает до 70–100%.

3. Погрешность при вычислении суммарной площади первых трех областей неустойчивости на плоскостях $\lambda_0 = \text{const}$ сохраняется в пределах $\pm 1-2\%$.

Области, изображенные на рисунках 6.7, 6.8, получены для цилиндрической оболочки (6.65)–(6.67). На рисунке 6.7 представлена плоскость $\lambda_0 = 0$, на рисунке 6.8 – плоскость $\lambda_0 = 2\lambda^*/3$. Погрешности составляют в первом случае 5%, 35%, 50% (суммарная 10%), во втором случае – 4%, 35%, 80% (суммарная 11%).

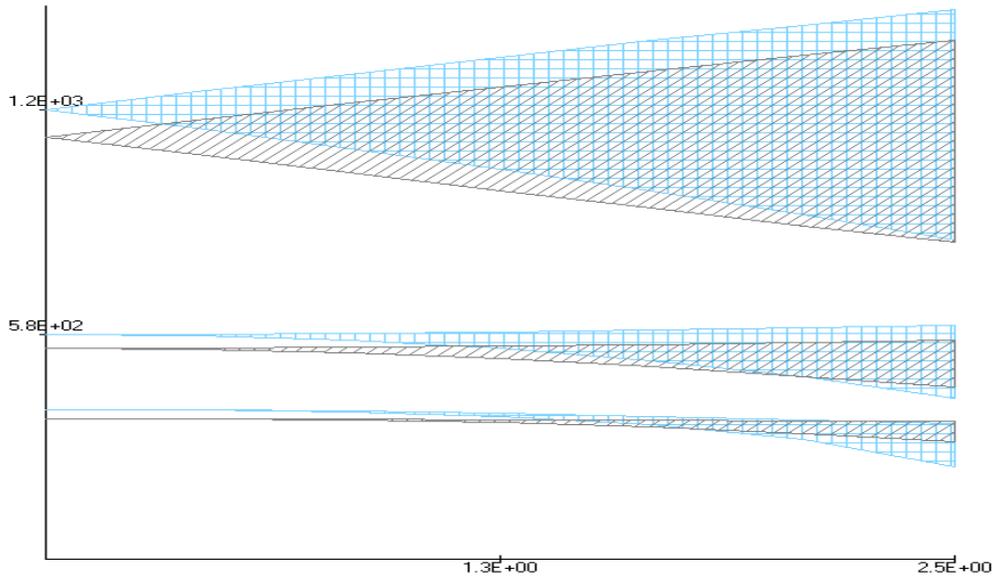


Рис. 6.7. Первые три ОДН. Области с клеточной штриховкой соответствуют (D), с диагональной – (A). Параметры оболочки: $R/h = 10$, $l/R = 2$, Th343 при (о.м.о). Плоскость $\lambda_0 = 0$ или $(\lambda_1 E^c_1 \cdot 10^{-8}, \theta)$.
Погрешности и параметры области: $p_\omega = 6\%$, $p_S = 10\%$, $S_{\text{ОДН}} = 24\%$.

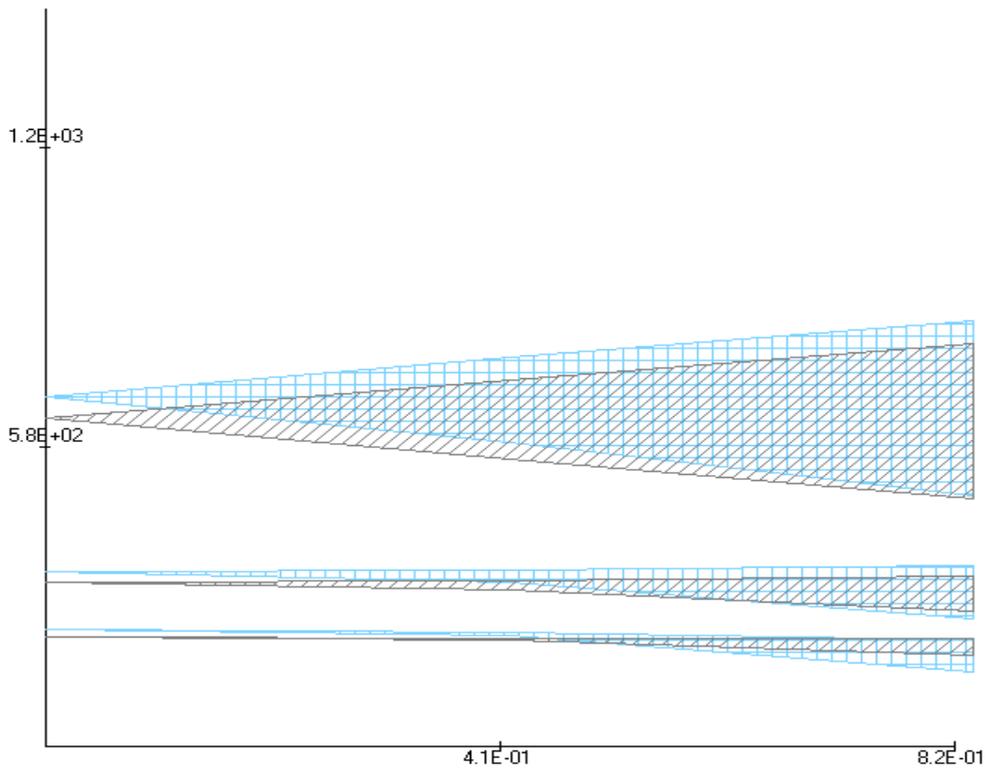


Рис. 6.8. Первые три ОДН. Области с клеточной штриховкой соответствуют (D), с диагональной – (A). Параметры: $R/h = 10$, $l/R = 2$, Th343 при (о.м.о). Плоскость $\lambda_0 = 2\lambda^*/3$ или $(\lambda_1 E^c_1 \cdot 10^{-8}, \theta)$.
Погрешности и параметры области: $p_\omega = 6\%$, $p_S = 11\%$, $S_{\text{ОДН}} = 55\%$.

6.5. РЕЗУЛЬТАТЫ ПАРАМЕТРИЧЕСКОГО АНАЛИЗА ПРОБЛЕМЫ ДИНАМИЧЕСКОЙ УСТОЙЧИВОСТИ В ПРИНЯТОЙ ПОСТАНОВКЕ

Реализованное построение ОДН на основе неклассической системы динамики оболочек, при учете всех инерционных сил, в широком диапазоне геометрических и физико-механических параметров конструкции показало следующие особенности:

1. Относительно размеров ОДН: не выявлено существенных уточнений как при расчетах по формулам (А) и (В), так и при сравнении (А) с (С). Погрешность определения относительной площади в подавляющем большинстве случаев составляет менее 2%. Следовательно, влияние сдвиговых деформаций, также как и влияние тангенциальных и сдвиговых инерционных слагаемых, можно в рассматриваемой постановке считать малозначимым.

2. Относительно положения ОДН на фазовых плоскостях $\lambda_0 = \text{const}$: уровень значимости учета сдвиговых деформаций полностью определяется аналогичной величиной при расчете частот собственных колебаний конструкции (глава 2). Вследствие этого, при расчете по (А) и (В) наблюдается смещение вершин ОДН вдоль оси θ . Погрешность определения местоположения вершины совпадает с погрешностью расчетного значения низшей собственной частоты, вносимой неучетом сдвига.

3. Относительно числа ОДН: при расчете по (А) нет ограничений на количество ОДН. Это существенно отличает его от расчета по (D). Сравнивая (А) и (D), отмечено, что на первых трех ОДН во всем диапазоне параметров наблюдается совпадение размеров главной области с точностью до 3%, суммарной области до 10%.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Сформулируем основные результаты диссертации.

1. Поставлены и решены новые краевые задачи расчета свободных установившихся гармонических колебаний упругих многослойных элементов конструкций различных геометрических форм: цилиндрических и усеченных конических оболочек, сферических поясов и комбинированных оболочечных конструкций. Проведен сравнительный анализ их собственных частот при использовании классической и уточненной теорий в геометрически линейной постановке. Показано, что для нижнего участка спектра отличие в результатах, полученных по теориям с учетом и без учета поперечного сдвига, может достигать 50%. Найдены области параметров, в которых значения частот собственных колебаний, вычисленных по разным оболочечным теориям, отличаются менее, чем на 10%.

2. Выполнено комплексное исследование влияния структурных и механических параметров композиционных материалов, порядка расположения армированных слоев, соотношения толщин слоев в пакете, а также их количества, геометрии оболочек и типа закрепления кромочных поверхностей на собственные частоты и на формы собственных колебаний таких конструкций. Показано, что в результате реализации другой комбинации перечисленных выше параметров, возможно добиться изменения значений частот от 70 до 100%. Также указаны комбинации характеристик, позволяющие корректировать тип формы собственных колебаний конструкции.

3. Создан эффективный программный комплекс, основанный на методе инвариантного погружения, предназначенный для решения многоточечных краевых задач для жестких систем обыкновенных дифференциальных

уравнений, который позволил выполнить анализ собственных частот оболочек вращения, и построить формы их свободных колебаний.

4. Поставлена и решена проблема динамической устойчивости упругих многослойных свободно опертых цилиндрических оболочек. Получено уравнение критических частот, позволяющее реализовать построение любого числа ОДН. Проведен сравнительный анализ размеров и расположения ОДН при использовании линеаризованных динамических уравнений классической и уточненной теорий. Показано, что степень влияния поперечного сдвига на расположение вершин ОДН вдоль частотной оси и на расчетные значения низшей собственной частоты совпадают. Следовательно, все выводы, сделанные при изучении спектра частот цилиндрической оболочки, остаются справедливыми и в данном случае.

5. Выполнено комплексное исследование влияния структурных и механических параметров композиционных материалов, порядка расположения армированных слоев, соотношения толщин слоев в пакете, а также их количества на размер и расположение ОДН. Показано, что в подавляющем большинстве случаев, несмотря на изменение расположения областей в фазовых плоскостях, отношение их суммарной площади к площади минимального, содержащего их прямоугольника, остается неизменным ($\pm 2\%$).

6. Исследована значимость учета инерционных сил различной природы при расчете и построении ОДН. Показано, что по сравнению с инерцией прогиба влиянием остальных сил допустимо пренебречь.

7. Проведен сравнительный анализ первых трех ОДН с областями, рассчитанными по приближенным формулам В. В. Болотина. В широком диапазоне параметров конструкции отмечено совпадение размеров главной области неустойчивости с точностью до 2–3%, суммарной – до 10%.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Абдикаримов Р. А., Ахмаджонов Д. Г. Параметрические колебания вязкоупругой ортотропной цилиндрической оболочки с учетом деформации сдвига и инерции вращения // Тезисы докладов Респуб. науч. конф. Математическое моделирование и вычислительный эксперимент, 2002. – С. 26.
- [2] Абовский Н. П., Андреев Н. П., Деруга А. П. Вариационные принципы теории упругости и теории оболочек – М: Наука, 1978. – 287 с.
- [3] Агаловян Л. А., Гулгазарян Л. Г. О частотах собственных колебаний и пограничном слое для ортотропной пластинки в смешанной краевой задаче // Изв. АН Армении. Мех. – 2001. – 54. № 2. – С. 32-41.
- [4] Агаловян Л. А., Оганесян Р. Ж. Собственные колебания ортотропных пластин при смешанных краевых условиях на лицевых поверхностях // Изв. АН Армении. Мех. – 2003. – 56. № 4. – С. 18-28.
- [5] Адамар Ж. Задача Коши для линейных уравнений с частными производными гиперболического типа – М.: Наука, 1987. – 351 с.
- [6] Акбаров С. Д., Тарим Е. Т. Анализ напряжений в прямоугольной толстой пластине из композитного материала с пространственной локально искривленной структурой при вынужденных колебаниях // Мех. композит. матер. – 2004. – 40. № 6. – С. 779-790.
- [7] Акуленко Л. Д., Нестеров С. В. Собственные поперечные колебания неоднородного стержня // Изв. РАН. Мех. тверд. тела. – 2003. – № 3. – С. 179-192. – Рус.
- [8] Алейников И. А., Власова Е. В. Об одном эффективном подходе к построению систем базисных функций при решении краевых задач //

- Деп. в ВИНТИ 13.04.2005, N 493-B2005 – Рос. гос. откр. техн. ун-т путей сообщ. – М., 2005. – 11 с.
- [9] Алейников И. А., Власова Е. В. Метод определения собственных частот тонких прямоугольных пластин // Деп. в ВИНТИ 11.02.2003, N 275-B2003 – Рос. гос. откр. техн. ун-т путей сообщ. – М., 2003. – 48 с.
- [10] Алексеев А. Е. О влиянии поперечного давления на устойчивость пластины // Прикл. мех. и техн. физ. – 2005. – 46. № 2. – С. 170-178.
- [11] Алфутов Н. А., Зиновьев П. А., Попов Б. Г. Расчет многослойных пластин и оболочек из композиционных материалов – М: Машиностроение, 1984. – 264 с.
- [12] Алфутов Н. А., Зиновьев П. А., Попов Б. Г. Основы расчёта на устойчивость упругих систем – М: Машиностроение, 1991. – 333 с.
- [13] Амбарцумян С. А. Общая теория анизотропных оболочек – М.: Наука, 1974. – 446 с.
- [14] Амбарцумян С. А. Теория анизотропных пластин. Прочность, устойчивость, колебания – М.: Наука, 1987. – 360 с.
- [15] Амбарцумян С. А. Теория анизотропных оболочек – М.: Физматгиз, 1961. – 384 с.
- [16] Амбарцумян С. А. Теория анизотропных пластинок – М.: Физматгиз, 1967. – 266 с.
- [17] Амиро И. Я., Заруцкий В. А., Паламарчук В. Г. Динамика ребристых оболочек – Киев: Наук. думка, 1983. – 204 с.
- [18] Амосов А. А., Жаворонок С. И. О решении задач динамики оболочек на основе трехмерной теории высокого порядка // Материалы 10 Международного симпозиума „Динамические и технологические проблемы механики конструкций и сплошных сред“, Ярополец, 9-13 февр., 2004. – М., 2004. – Т. 1.– С. 5.

- [19] Андреев А. Н. Фундаментальное решение неклассических дифференциальных уравнений изгиба трансверсально изотропной пластинки // Численные методы решения задач теории упругости и пластичности: Тр. XIII Межреспуб. конф., Новосибирск, 22-24 июня 1993 г. – Новосибирск, 1995. – С. 13-19.
- [20] Андреев А. Н. О напряженном состоянии и устойчивости слоистых балок и стержней // Изв. вузов. Строительство и архит. – 1983. № 3. – С. 51-54.
- [21] Андреев А. Н. Об устойчивости слоистой цилиндрической оболочки при внешнем давлении // Прикл. механика. – 1984. – 10. № 10. – С. 59-64.
- [22] Андреев А. Н. Осесимметричное выпучивание трехслойных круговых пластин // Динамика сплошной среды: Сб. науч. тр. АН СССР СО Ин-т гидродинамики, Новосибирск, 1984. – Вып. 66. – С. 3-11.
- [23] Андреев А. Н. О численном интегрировании уравнений осесимметричного изгиба слоистых оболочек вращения методом инвариантного погружения // Динамика сплошной среды: Сб. науч. тр. АН СССР СО Ин-т гидродинамики, Новосибирск, 1985. – Вып. 73. – С. 137-148.
- [24] Андреев А. Н. О численном решении краевых задач статики слоистых композитных оболочек вращения // Численные методы решения задач теории упругости и пластичности: Материалы X Всесоюз. конф., Красноярск, 23-27 февр. 1987 г. – Новосибирск, 1988. – С. 3-8.
- [25] Андреев А. Н. О численном решении линейных краевых задач устойчивости слоистых оболочек вращения // Прикл. механика. – 1989. – 25. № 8. – С. 60-66.
- [26] Андреев А. Н. К оценке прочности упругой слоистой композитной оболочки вращения в геометрически нелинейной постановке // Прикл. механика. – 1990. – 26. № 7. – С. 43-49.

- [27] Андреев А. Н. Свободные колебания слоистых упругих композитных оболочек вращения // ПМТФ. – 1995. – 36. № 5. – С. 146-154.
- [28] Андреев А. Н. Устойчивость многослойной композитной конической оболочки при равномерном внешнем давлении // ПМТФ. – 1999. – 40. № 4. – С. 198-207.
- [29] Андреев А. Н. Об одной задаче динамической устойчивости слоистой упругой трансверсально изотропной пластинки // Численные методы решения задач теории упругости и пластичности: Тр. XIX Всерос. конф., Бийск, 28-31 августа 2005 г. – Новосибирск, 2005. – С. 5-11.
- [30] Андреев А. Н., Немировский Ю. В. Многослойные анизотропные оболочки и пластины: Изгиб, устойчивость, колебания – Новосибирск: Наука, 2001. – 287 с.
- [31] Андреев А. Н., Немировский Ю. В. К теории упругих многослойных анизотропных оболочек // Изв. АН СССР. – 1977. № 5. – С. 87-96.
- [32] Андреев А. Н., Немировский Ю. В. Об одном варианте теории упругих многослойных анизотропных пластин // Прикл. механика. – 1978. – 14. № 7. – С. 55-62.
- [33] Андреев А. Н., Немировский Ю. В. К теории изгиба и колебаний упругих многослойных анизотропных пластин // Прикладные проблемы прочности и пластичности: Сб. статей, Горький, 1977. – Вып. 7. – С. 29-34.
- [34] Андреев А. Н., Немировский Ю. В. Устойчивость упругих многослойных армированных оболочек // Механика композ. материалов. – 1979. № 1. – С. 86-95.
- [35] Андреев А. Н., Немировский Ю. В. Численный анализ напряженно-деформированного состояния слоистых оболочек вращения методом инвариантного погружения // Изв. АН АрмССР. Механика. – 1989. – 42. № 1. – С. 9-19.

- [36] Андреев А. Н., Немировский Ю. В. О некоторых методах численного решения краевых задач неклассической теории слоистых оболочек // Численные методы решения задач теории упругости и пластичности: Тр. 16-й Межреспуб. конф., Новосибирск, 6-8 июля, 1999. – Новосибирск, 1999. – С. 6-16.
- [37] Андреев А. Н., Петрушева И. И. Численное исследование осесимметричного деформирования сложной цилиндрической оболочки // Вестник КемГУ. – 2001. – Вып. №3(7). – С. 205-210.
- [38] Андреев А. Н., Петрушева И. И. Свободные колебания упругой многослойной составной оболочки вращения // Проблемы оптимального проектирования сооружений: сб. докл. V-го Всероссийского семинара / Новосиб. гос. архитектур.-строит. ун-т. – Новосибирск: НГАСУ(Сибстрин), 2005. 361 с. – С. 23-32.
- [39] Андронов А. А., Леонтович М. А. О колебаниях системы с периодически меняющимися параметрами // Журнал рус. физ.-хим. об-ва. Физика. – 1927. Т. 59. – С. 429-443.
- [40] Андропова Ю. В., Назаренко Е. С., Соболева В. А. О влиянии упругого закрепления на собственные колебания круглых пластин по уточненной теории // Прикл. пробл. прочн. и пластич. – 2001. № 63. – С. 75-78, 194, 201.
- [41] Андриюшин В. А., Недбай А. Я. Колебания слоистых цилиндрических оболочек с произвольными граничными условиями // Мех. композ. матер. и конструкций. – 2003. – 9. № 3. – С. 287-296.
- [42] Аннин Б. Д., Каламкаров А. Л., Колпаков А. Г., Партон В. З. Расчет и проектирование композитных материалов и элементов конструкций – Новосибирск: Наука, 1993. – 256 с.

- [43] Антоненко Э. В., Иванов С. С. Неосесимметричные собственные колебания ортотропных тонкостенных цилиндров переменной толщины // Мат. Мех. – 2001. № 3. – С. 152-155.
- [44] Арсенин В. Я. Методы математической физики и специальные функции – 2-е изд. – М.: Наука, 1984. – 384 с.
- [45] Асланян А. Г., Лидский В. Б. Распределение собственных частот тонких упругих оболочек – М.: Наука, 1974. – 156 с.
- [46] Бабич И. Ю., Гузь А. Н. Устойчивость цилиндрических оболочек, изготовленных из материала с малой сдвиговой жесткостью – Киев: Наук. думка, 1970. – 275 с.
- [47] Бабич И. Ю., Семенюк Н. П. Колебания и устойчивость волнообразных цилиндрических оболочек из композитов // Проблемы механики: Сборник статей к 90-летию со дня рождения А. Ю. Ишлинского. – М., 2003. – С. 105-114.
- [48] Баженов В. А., Дашенко А. Ф., Коломиец Л. В., Оробей В. Ф., Сурьянинов Н. Г. Численные методы в механике – Одесса: «СТАНДАРТЬ», 2005. – 563 с.
- [49] Баженов В. Г., Игоничева Е. В., Кибец А. И., Лаптев П. В., Ломунов В. К. Выпучивание упругих и упругопластических оболочек вращения при осевом ударном нагружении // Изв. Акад. инж. наук РФ. – 2001. – Юбил. том. – С. 7-23.
- [50] Баженов В. Г., Чекмарев Д. Т. Вариационно-разностные схемы в нестационарных волновых задачах динамики пластин и оболочек – Н. Новгород: Изд-во Нижегород. ун-та, 1992. – 160 с.
- [51] Бакулин В. Н. Метод конечных элементов для исследования напряженно-деформированного состояния трехслойных цилиндрических оболочек – М. ЦНТИ Информации, 1985. – 140 с.

- [52] Бакулин В. Н. Конечно-элементные модели для расчета слоистых оболочек вращения ненулевой гауссовой кривизны // Мат. моделир. – 2002. – 14. № 8. – С. 37-43.
- [53] Бакулин В. Н., Образцов И. Ф., Потопахин В. А. Динамические задачи нелинейной теории многослойных оболочек. Действие интенсивных термосиловых нагрузок, концентрированных потоков энергии – М. Наука. Физматлит, 1998. – 464 с.
- [54] Барышев А. А., Недорезов П. Ф. Задача об установившихся колебаниях вязкоупругой прямоугольной пластины с двумя шарнирно опертыми сторонами в уточненной постановке // Мех. деформир. сред. – 2002. № 14. – С. 18-27.
- [55] Батов П. А. Оценка пределов применимости технической теории анизотропных пластин в задачах устойчивости: Автореф. дис. ... канд. физ.-мат. наук. Тул. гос. ун-т, Тула, 2002. – 20 с.
- [56] Бауэр С. М., Смирнов А. Л., Товстик П. Е., Филиппов С. Б. Асимптотические методы в механике тонкостенных конструкций и их приложения // Сборник трудов НИИ математики и механики им. акад. В. И. Смирнова (к 70-летию основания института) / НИИ мат. и мех. – СПб, 2002. – С. 167-188.
- [57] Беликов Г. И. Статика, динамика и устойчивость сетчатых и подкрепленных оболочек с учетом поперечного сдвига – Волгоград: Изд-во ВолгГАСА, 2003. – 297 с.
- [58] Беликов Г. И. Статика, динамика и устойчивость сетчатых и подкрепленных оболочек с конечной сдвиговой жесткостью: Автореф. дис. ... докт. техн. наук. Волгогр. гос. архит.-строит. ун-т, Волгоград, 2004. – 44 с.

- [59] Беликов Г. И. Свободные колебания упругих подкрепленных оболочек по уточненной модели // Деп. в ВИНТИ 07.10.2003, N 1776-B2003 – Волгогр. гос. архит.-строит. акад. – Волгоград, 2003. – 13 с.
- [60] Беликов Г. И. Свободные и вынужденные колебания конструктивно-анизотропных сетчатых оболочек с конечной сдвиговой жесткостью // Безопасность жизнедеятельности, 21 век: Материалы Международного научного симпозиума, Волгоград, 9-12 окт., 2001. – Волгоград, 2001. – С. 227-229.
- [61] Беликов Г. И., Кондрашов В. В. Обзор развития теорий и методов расчета сетчатых оболочек из композиционных материалов // Деп. в ВИНТИ 17.02.2005, N 235-B2005 – Волгогр. гос. архит.-строит. ун-т. – Волгоград, 2005. – 47 с.
- [62] Беллман Р. Теория устойчивости решений дифференциальных уравнений – М.: ИЛ, 1954.
- [63] Белозеров Л. Г., Киреев В. А. Композитные оболочки при силовых и тепловых воздействиях – М.:Физматлит, 2003. – 388 с.
- [64] Белубекян В. М. Локализованная неустойчивость сжатой пластинки // Проблемы механики тонких деформируемых тел: Сборник: Посвящается 80-летию академика НАН Армении С. А. Амбарцумяна / Ин-т мех. НАН Армении. – Ереван, 2002. – С. 61-66.
- [65] Белубекян М. В. Об уравнениях теории пластин, учитывающих поперечные сдвиги // Проблемы механики тонких деформируемых тел: Сборник: Посвящается 80-летию академика НАН Армении С. А. Амбарцумяна / Ин-т мех. НАН Армении. – Ереван, 2002. – С. 67-88.
- [66] Бенерджи П., Баттерфилд Р. Методы граничных элементов в прикладных науках – М.:Мир, 1984. – 495 с.
- [67] Богданович А. Е. Нелинейные задачи динамики цилиндрических композитных оболочек – Рига: Зинатне, 1987. – 295 с.

- [68] Богданович А. Е. Динамическая устойчивость упругой ортотропной цилиндрической оболочки с учетом поперечных сдвигов // Механика полимеров. – 1973. № 2.
- [69] Богданович А. Е. Обзор исследований по устойчивости цилиндрических оболочек при осевом динамическом сжатии. 1. Ранние работы и основные качественные результаты; 2. Работы последних лет и современное состояние проблемы // В кн.: Электродинамика и механика сплошных сред. – Рига, 1980. – С. 68-87, 88-105.
- [70] Богданович А. Е., Столярова Л. А. О влиянии граничных условий на частоты собственных колебаний композитных цилиндрических оболочек с наполнителем // Механика композитных материалов. – 1980. № 1. – С. 62-72.
- [71] Бойко Д. В., Железнов Л. П., Кабанов В. В. Исследование нелинейного деформирования и устойчивости некруговых цилиндрических оболочек при кручении // Изв. АН. Мех. тверд. тела. РАН. – 2004. № 4. – С. 168-176.
- [72] Болотин В. В. Прочность, устойчивость и колебания многослойных пластин // Расчеты на прочность. – М, 1965. № 11. – С. 31-63.
- [73] Болотин В. В. К теории слоистых сред // Изв. АН СССР. ОТН. Механика и машиностроение. – 1963. № 3. – С. 65-72.
- [74] Болотин В. В. Об изгибе плит, состоящих из большого числа слоев // Изв. АН СССР. ОТН. Механика и машиностроение. – 1964. № 1. – С. 61-66.
- [75] Болотин В. В. О теориях армированных тел // Изв. АН СССР. Механика. – 1965. № 1.
- [76] Болотин В. В. Основные уравнения теории армированных сред // Механика полимеров. – 1965. № 2.

- [77] Болотин В. В. О плотности частот собственных колебаний тонких упругих оболочек // ПММ. – 1963. т. 27. – Вып. 2. – С. 362-364.
- [78] Болотин В. В. Краевой эффект при колебаниях упругих оболочек // ПММ. – 1960. т. 24. – Вып. 5. – С. 831-842.
- [79] Болотин В. В. Неконсервативные задачи теории упругой устойчивости – М: Гостехиздат, 1961. – 339 с.
- [80] Болотин В. В. Динамическая устойчивость упругих систем – М: Гостехиздат, 1956. – 595 с.
- [81] Болотин В. В., Гришко А. А., Дубовских Ю. А., Петровский А. В. Влияние присоединенных элементов на динамическую устойчивость упругих неконсервативных систем // Тезисы докл. Отчетной конф.-выставки подпрограммы 205 „Транспорт“ науч.-техн. прогр. Минобразования РФ „Научные исследования высшей школы по приоритетным направлениям науки и техники“, Москва-Звенигород, 11-13 февр., 2002. – М., 2001. – С. 117.
- [82] Болотин В. В., Москаленко В. Н. Пластины и оболочки из армированных материалов. Основные уравнения, количественные результаты // Докл. научно-тех. конф. по итогам научно-исслед. работ МЭИ за 1966-67 гг. секция энергомаш. – М., 1967.
- [83] Болотин В. В., Новичков Ю. Н. Механика многослойных конструкций – М: Машиностроение, 1980. – 375 с.
- [84] Бочкарев С. А., Матвеев В. П. Решение некоторых спектральных задач многослойных оболочек вращения в рамках обобщенной теории оболочек Тимошенко // Математическое моделирование. – 2000. – 12. №5. – С. 55-60.
- [85] Братусь А. С. Кратные собственные значения в неконсервативных задачах о стабилизации упругих систем // Изв. РАН. Мех. тверд. тела. – 2001. № 6. – С. 140-148.

- [86] Бронштейн И. Н., Семедяев К. А. Справочник по математике для инженеров – М.-Л.: ОГИЗ, 1948. – 556 с.
- [87] Бублик Б. Н. Численное решение динамических задач теории пластин и оболочек – Киев: Наук. думка, 1976. – 222 с.
- [88] Бублик Б. Н. Численное решение задач пластин и оболочек – Киев: Издательство Киевского Университета, 1969. – 148 с.
- [89] Букашкина О. С. Нелинейные параметрические колебания конической оболочки // Вторые Поляховские чтения: Всероссийская научная конференция по механике, Санкт-Петербург, 2-4 февр., 2000: Тезисы докладов. – СПб., 2000. – С. 115.
- [90] Букашкина О. С. Нелинейные параметрические колебания цилиндрической оболочки // Вестн. С.-Петербург. ун-та. Сер. 1. – 2000. № 2. – С. 45-59, 139.
- [91] Бутко А. М., Колочинский П. В. Собственные колебания двухслойных оболочек с огнезащитным слоем // Вопросы строительной механики, пожаробезопасности конструкций и расчет гидротехнических сооружений: Сборник научных трудов / Моск. гос. ун-т природообустройства. – М., 2003. – С. 147-155.
- [92] Буштырков А. А., Найда А. А. Поведение стеклопластиковых цилиндрических оболочек при действии внешнего давления // Механика полимеров. – 1972. № 2.
- [93] Вайнберг Д. В., Ждан В. З. Матричные алгоритмы в теории оболочек вращения – Киев: Изд-во при Киев. ун-те, 1967. – 164 с.
- [94] Ван Фо Фы Г. А. Теория армированных материалов с покрытиями – Киев: Наук. думка, 1971. – 232 с.
- [95] Ванин Г. А. Микромеханика композиционных материалов – Киев: Наукова думка, 1985. – 304 с.

- [96] Ванин Г. А., Семенюк Н. П. Устойчивость оболочек из композиционных материалов с несовершенствами – Киев: Наук. думка, 1987. – 200 с.
- [97] Ванин Г. А., Семенюк Н. П., Емельянов Р. Ф. Устойчивость оболочек из армированных материалов – Киев: Наук. думка, 1978. – 221 с.
- [98] Васидзу К. Вариационные методы в теории упругости и пластичности – М.: Мир, 1987. – 542 с.
- [99] Васильев В. В. Механика конструкций из композитных материалов – М: Машиностроение, 1988. – 269 с.
- [100] Весоловский З. Динамические задачи нелинейной теории упругости – Киев: Наук, думка, 1981. – 216 с.
- [101] Вильде М. В., Гуляева И. М. Изгибный граничный резонанс в системе из двух состыкованных торцами полуполос // Математика. Механика: Сборник научных трудов. Вып. 6 / Саратов. гос. ун-т. – Саратов, 2004. – С. 174-176.
- [102] Вильде М. В., Каплунов Ю. Д. Краевой резонанс в оболочках вращений // 8 Всероссийский съезд по теоретической и прикладной механике, Пермь, 23-29 авг., 2001: Аннотации докладов. – Екатеринбург, 2001. – С. 153.
- [103] Власов В. З. Общая теория оболочек и ее приложения в технике – М. Л.: Гостехиздат, 1949. – 784 с.
- [104] Волков С. Д., Ставров В. П. Статистическая механика композитных материалов – Минск: Изд-во БГУ, 1978. – 208 с.
- [105] Вольмир А. С. Нелинейная динамика пластинок и оболочек – М.: Наука, 1972. – 432 с.
- [106] Вольмир А. С. Устойчивость деформируемых систем. – 2-е изд. – М.: Наука, 1967. – 984 с.

- [107] Вольтерра В. Теория функционалов, интегральных и интегродифференциальных уравнений / Пер. с англ. под ред. П. И. Кузнецова. – М.: Наука, 1982. – 304 с.
- [108] Ворович И. И. Математические проблемы нелинейной теории полых оболочек – М., 1989. – 376 с.
- [109] Ворович И. И., Шленев М. А. Пластины и оболочки // Механика-1963. Итоги науки. – М.: ВИНТИ, 1965. – С. 91-177.
- [110] Гавриленко Г. Д. Устойчивость оболочек с начальными прогибами переменной амплитуды // Доп. Нац. АН України. – 2004. № 5. – С. 46-51.
- [111] Гаврилов Ю. В. Определение частот собственных колебаний упругих круговых цилиндрических оболочек // Изв. АН СССР. ОТН. Механика и машиностроение, 1961. № 1. – С. 163-166.
- [112] Галилеев С. М., Губин Н. Н. Метод начальных функций в расчете оболочек // Архитектура оболочек и прочностной расчет тонкостенных строительных и машиностроительных конструкций сложной формы: Тезисы докладов Межд. науч. конф., Москва, 4-8 июня, 2001. – М., 2001. – С. 18-19.
- [113] Галиныш А. К. Расчет пластин и облочек по уточненным теориям // Исследования по теории оболочек и пластин. – Казань: Изд-во Казан. ун-та, 1970. – Вып. 6-7 – С. 23-64.
- [114] Геворкян Г. З. Свободные поперечные колебания прямоугольных ортотропных пластин переменной толщины при учете поперечных сдвигов // Изв. АН Армении. Мех. – 2002. – 55. №1. – С. 55-61.
- [115] Геворкян Г. З., Киракосян Р. М. Свободные поперечные колебания прямоугольных ортотропных пластин переменной толщины с учетом поперечных сдвигов и инерции вращения // Проблемы механики тонких деформируемых тел: Сборник: Посвящается 80-летию акаде-

мика НАН Армении С. А. Амбарцумяна / Ин-т мех. НАН Армении. – Ереван, 2002. – С. 137-146.

- [116] Гнуни В. Ц. Анализ влияния поперечных сдвигов на характеристики жесткости, устойчивости и колебаний пологих оболочек двойкой постоянной кривизны // Изв. АН Армении. Мех. – 2003. – 56. № 4. – С. 39-45.
- [117] Гнуни В. Ц. О параметрически возбуждаемых колебаниях слоистых анизотропных гибких оболочек // Изв. АН АрмССР. Сер. физ.-мат. Наук. – 1962. – 15. № 3. – С. 29-36.
- [118] Годунов С. К. О численном решении краевых задач для систем линейных обыкновенных дифференциальных уравнений // Успехи математических наук. – 1961. – 16. № 3. – С. 171-174.
- [119] Голушко С. К. Прямые и обратные задачи механики упругих композитных пластин и оболочек вращения: Автореф. дис. ... докт. физ.-мат. наук. Новосибирск, 2005.
- [120] Голушко С. К., Горшков В. В. Прочность и начальное разрушение многослойных армированных эллипсоидальных оболочек // Численные методы решения задач теории упругости и пластичности: Тр. XVIII Межреспуб. конф., Кемерово, 1-3 июля 2003 г. – Новосибирск, 2003. – С. 38-46.
- [121] Голушко С. К., Морозова Е. В. Влияние выбора модели композиционного материала на напряженно-деформированное состояние кольцевой пластины // Численные методы решения задач теории упругости и пластичности: Тр. XIX Всерос. конф., Бийск, 28-31 августа 2005 г. – Новосибирск, 2005. – С. 85-91.
- [122] Гольденблат И. И. Пластинки и оболочки из стеклопластиков – М.: Высшая школа, 1970.

- [123] Гольденблат И. И. Динамическая устойчивость сооружений – М.: Стройиздат, 1948.
- [124] Гольденвейзер А. Л. Теория упругих тонких оболочек – М.: Наука, 1976. – 512 с.
- [125] Гольденвейзер А. Л. Методы обоснования и уточнения теории оболочек // ПММ. – 1968. т. 32. – Вып. 4.
- [126] Гольденвейзер А. Л. Асимптотические свойства собственных значений в задачах теории тонких упругих оболочек // ПММ. – 1961. т. 25. – Вып. 4. – С. 729-741.
- [127] Гольденвейзер А. Л. Качественный анализ свободных колебаний упругой тонкой оболочки // ПММ. – 1966. т. 30. – Вып. 1. – С. 94-109.
- [128] Гольденвейзер А. Л., Лидский В. Б., Товстик П. Е. Свободные колебания тонких упругих оболочек – М.: Наука, 1979. – 383 с. библиограф. 154
- [129] Гонткевич В. С. Собственные колебания пластин и оболочек: Справочник / Под ред. А. П. Филиппова. – Киев: Наук. думка, 1964. – 288 с.
- [130] Гонткевич В. С. Собственные колебания ортотропных цилиндрических оболочек // В кн.: Тр. Конф. по теории пластин и оболочек. Казань, 1961. – С. 124-129.
- [131] Гонткевич В. С. Собственные колебания пластинок и оболочек – Киев: Наук. думка, 1964. – 288 с.
- [132] Горшков В. В. Анализ особенностей осесимметричного деформирования упругих композитных оболочек вращения: Автореф. дис. ... канд. физ.-мат. наук. Новосибирск, 2004. – РАН СО Ин-т теоретической и прикладной механики, 20 с.
- [133] Горынин Г. Л. Метод асимптотического расщепления в задаче о колебаниях композитной балки в трехмерной постановке // образова-

- ние, наука и техника: XXI век: Сборник научных статей. Вып. 2 / Югор. гос. ун-т. – Ханты-Мансийск, 2004. – С. 100-108.
- [134] Горынин Г. Л., Немировский Ю. В. Метод асимптотического расщепления в задаче изгиба слоистых балок на упругом основании // Новосибир. гос. арх.-строит. ун-т (Сибстрин). – Новосибирск, 2004. – №12(552). – С. 4-10.
- [135] Григолюк Э.И., Куликов Г. М. Пути развития теории упругих многослойных пластин и оболочек // Вестник Тамбовского ГТУ, 2005. – Т.11. № 2А.
- [136] Григолюк Э. И. Уравнения трехслойных оболочек с легким заполнителем // Изв. АН СССР. Отдел техн. Наук. – 1957. № 1. – С. 77-84.
- [137] Григолюк Э. И., Кабанов В. В. Устойчивость круговых цилиндрических оболочек // Итоги науки. Сер. Механика. Механика твердых деформируемых тел. – ВИНТИ, 1969. – 348 с.
- [138] Григолюк Э. И., Кабанов В. В. Устойчивость оболочек – М.: Наука, 1978. – 359 с.
- [139] Григолюк Э. И., Коган Ф. А. Современное состояние теории многослойных оболочек // Прикладная механика. – 1972. – 8. № 5. – С. 5-17.
- [140] Григолюк Э. И., Куликов Г. М. Развитие общего направления в теории многослойных оболочек // Механика композитных материалов. – 1988. № 2. – С. 287-298.
- [141] Григолюк Э. И., Куликов Г. М. Многослойные армированные оболочки: Расчет пневматических шин – М.: Машиностроение, 1988. – 288 с.
- [142] Григолюк Э. И., Куликов Г. М. О коэффициенте сдвига в теории оболочек типа Тимошенко // Докл. РАН. – 2001. – 381. № 1. – С. 47-49.

- [143] Григолюк Э. И., Мамай В. И. Исследование статического и динамического поведения систем с пощелкиванием с помощью простейших стержневых моделей // Статика и динамика тонкостенных конструкций / Под ред. Э. И. Григолюка. – М.: Изд-во МГУ, 1980. – С. 3-53.
- [144] Григолюк Э. И., Мамай В. И. Нелинейное деформирование тонкостенных конструкций – М.: Наука. Физматлит, 1997. – 272 с. – ISBN 5-02-015170-X.
- [145] Григолюк Э. И., Чулков П. П. Критические нагрузки трехслойных цилиндрических и конических оболочек – Новосибирск: Зап.-Сиб. кн. изд-во, 1966. – 223 с.
- [146] Григолюк Э. И., Чулков П. П. Устойчивость и колебания трехслойных оболочек – М.: Изд-во МГУ, 1973. – 215 с.
- [147] Григоренко Я. М. Изотропные и анизотропные слоистые оболочки вращения переменной жесткости – Киев: Наук. думка, 1973. – 228 с.
- [148] Григоренко Я. М., Василенко А. Т. Задачи статики анизотропных неоднородных оболочек – М.: Наука, 1992. – 396 с.
- [149] Григоренко Я. М., Крюков М. М., Иванова Ю. И. Решение двумерных задач о напряженно-деформированном состоянии слоистых пологих оболочек с ортотропными слоями // Доп. Нац. АН України. – 2003. № 2. – С. 45-49. – Укр.
- [150] Громов А. Н. Устойчивость армированных цилиндрических оболочек с упругим наполнителем: Автореф. дис. ... канд. физ.-мат. наук. СПб. гос. ун-т, Санкт-Петербург, 2001. – 16 с.
- [151] Громько Ю. В. Свободные колебания трехслойной кольцевой упругой пластины // Матер., технол., инструм. – 2001. – 6. № 4. – С. 9-12.
- [152] Гузь А. Н. Устойчивость трехмерных деформируемых тел – Киев: Наук. думка, 1971. – 275 с.

- [153] Гузь А. Н., Бабич И. Ю. Трехмерная теория устойчивости стержней, пластин и оболочек – Киев: Вища школа, 1980. – 167 с.
- [154] Гузь А. Н., Бабич И. Ю., Пелех Б. Л., Тетерс Г. А. О применимости двумерных прикладных теорий в задачах устойчивости при осевом сжатии цилиндрических оболочек, выполненных из материалов с низкой сдвиговой жесткостью // Механика полимеров. – 1970. № 1. – С. 141-143.
- [155] Гузь А. Н., Максимюк В. А., Чернышенко И. С. Проблемно-ориентированные функционалы в теории нелинейно-упругих композитных оболочек // Механика композитных материалов. – 2002. – 38. № 4. – С. 497-506.
- [156] Гузь А. Н., Чернышенко И. С., Шнеренко К. И., Чехов Вал. Н., Чехов Вик. Н. Цилиндрические оболочки, ослабленные отверстиями – Киев: Наук. думка, 1974. – 271 с.
- [157] Деккер К., Вервер Я. Устойчивость методов Рунге-Кутты для жестких нелинейных дифференциальных уравнений – М.: Мир, 1988. – 332 с.
- [158] Демидович Б. П. Лекции по математической теории устойчивости – 2-е изд. – М.: Изд-во МГУ, 1998. – 480 с. – ISBN 5-211-03641-7.
- [159] Демириз И. Г., Акбаров С. Д. Анализ напряжений в толстой прямоугольной пластине из композита с пространственной периодически искривленной структурой при вынужденных колебаниях // Механика композитных материалов. – 2003. – 39. № 3 – С.353-364.
- [160] Джеффрис Г., Свирлс Б. Методы математической физики – вып. 2 / Пер. с англ. под ред. В. Н. Жаркова. – М.: Мир, 1970. – 352 с.
- [161] Доннелл Л. Г. Балки пластины и оболочки – М.: Наука, 1982. – 568 с.

- [162] Дудченко А. А., Лурье С. А., Образцов И. Ф. Анизотропные многослойные пластины и оболочки // Итоги науки и техники. МДТТ. – М.: ВИНТИ, 1983. – Т. 15. – С. 3-68.
- [163] Елпатиевский А. Н., Васильев В. В. Прочность цилиндрических оболочек из армированных материалов – М: Машиностроение, 1972. – 168 с.
- [164] Заманов А. Д. Собственные колебания полосы из композитного материала с локально искривленной структурой // Мех. композит. матер. – 2005. – 41. № 1. – С. 71-78.
- [165] Заруцкий В. А., Прокопенко Н. Я. Собственные колебания ребристых цилиндрических оболочек при низкой сдвиговой жесткости материала // Прикл. мех.: Международный научный журнал. – 2005. – 41. № 4. – С. 66-74.
- [166] Зенкевич О. Метод конечных элементов в технике / Пер. с англ. – М.: Мир, 1975.
- [167] Иванов В. А. Обзор литературы по устойчивости оболочек с упругим наполнителем // Труды семинара по теории оболочек 2. Казань, 1971.
- [168] Иванов В. Н., Кристиан Бок К расчету пластин и оболочек с отверстиями вариационно-разностным методом // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений: Межвузовский сборник научных трудов. – М., 2004. – Вып. 13. – С. 50-55.
- [169] Иванов Д. Н. Колебания и устойчивость тонких цилиндрических оболочек с криволинейным краем: Автореф. дис. ... канд. физ.-мат. наук. СПб. гос. ун-т, Санкт-Петербург, 2002. – 18 с.
- [170] Кабанов В. В. Устойчивость неоднородных цилиндрических оболочек – М: Машиностроение, 1982. – 253 с.

- [171] Кабриц С. А., Михайловский Е. И., Товстик П. Е., Черных К. Ф., Шамина В. А. Общая нелинейная теория упругих оболочек – СПб: Изд-во СПбГУ, 2002. – 386 с.: 72 ил., 3 табл. – Рус. – ISBN 5-288-02922-9.
- [172] Каменских И. В. Основные моменты при расчете на устойчивость пластин методом модуль-элементов // Нелинейная динамика и прикладная синергетика: Материалы международной научной конференции, Комсомольск-на-Амуре, 23-27 сент., 2002. Ч. 1. – Комсомольск-на-Амуре, 2003. – С. 33-37.
- [173] Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям – М.: Наука, 1971. – 576 с.
- [174] Кан С. Н., Бырсан К. Е., Алифанова О. А. Устойчивость оболочек – Харьков: Изд-во при Харьк. ун-те, 1970. – 153 с.
- [175] Канторович Л. В., Акилов Г. П. Функциональный анализ – 3-е изд., перераб. – М.: Наука, 1984. – 752 с.
- [176] Кармишин А. В., Лясковец В. А., Мяченков В. И., Фролов А. Н. Статика и динамика тонкостенных оболочечных конструкций – М.: Машиностроение, 1975. – 376 с.
- [177] Карнаухов В. Г., Козлов В. И., Рассказов А. О., Карнаухова О. В. Параметрические колебания трехслойной конической пьезооболочки // Мех. композит. матер. – 2003. – 39. № 1. – С. 25-38.
- [178] Карпов В. В., Сальников А. Ю. Устойчивость и колебания пологих оболочек ступенчато-переменной толщины при конечных прогибах – СПб: Изд-во СПбГАСУ, 2002. – 123 с.: 19 ил., 2 табл. – Рус.
- [179] Киракосян Р. М., Саркисян М. С. Напряженно-деформированное состояние ортотропной пластинки-полосы при учете поперечного сдвига и обжатия // Изв. АН Армении. Мех. – 2003. – 56. № 3. – С. 20-29.

- [180] Киреев И. В. Напряженно-деформированное состояние слоистых композитных оболочек вращения: Автореф. дис. ... канд. физ.-мат. наук. Новосибирск, 1997. – 19 с.
- [181] Клигман Е. П., Клигман И. Е., Матвеев В. П. Спектральная задача для оболочек с жидкостью // ПМТФ. – 2005. – 46. № 6. – С. 128-135.
- [182] Кобелев В. Н., Потопахин В. А. Динамика многослойных оболочек / Отв. ред. И. И. Ворович – Ростов-на-Дону: Изд-во Ростов. ун-та, 1985. – 159 с.
- [183] Ковригин Д. А. Устойчивость упругих систем // Изв. Акад. инж. наук Рос. Федерации. – 2001. № 2. – С. 85-95. – Рус.; рез. англ.
- [184] Козаров М. М. Динамическая устойчивость ортотропных конических оболочек от пульсирующей и гидростатической нагрузки // Теор. и прикл. мех. – 1970. – 1. № 2.
- [185] Колпак Е. П. Устойчивость безмоментных оболочек при больших деформациях – СПб: Изд-во СПбГУ, 2000. – 248 с.: ил. – Рус. – ISBN 5-7997-0218-2.
- [186] Коноплев Ю. Г., Саченков А. В. Очерки истории НИИ математики и механики им. Н. Г. Чеботарева // Исследования по теории пластин и оболочек. – 1989.
- [187] Коноплев Ю. Г., Тазюков Ф. Х. Устойчивость упругих пластин и оболочек при нестационарных воздействиях – Казань: Изд-во Казанск. ун-та., 1994. – 124 с.
- [188] Корн Г., Корн Т. Справочник по математике для научных работников и инженеров / Под общей редакцией И. Г. Арамановича. – М.: Наука, 1973. – 832 с.
- [189] Корнишин М. С. Нелинейные задачи теории пластин и пологих оболочек и методы их решения – М: Наука, 1964. – 192 с.

- [190] Королев В. И. Слоистые анизотропные пластинки и оболочки из армированных пластмасс – М: Машиностроение, 1966. – 272 с.
- [191] Королев В. И. Упруго-пластические деформации оболочек – М: Машиностроение, 1971. – 303 с.
- [192] Король Е. З. К определению форм и частот собственных колебаний анизотропных конических оболочек // Деп. в ВИНТИ 04.04.2002, N 609-B2002 – Ин-т мех. МГУ. – М., 2002. – 105 с.
- [193] Кравчук А. С., Майборода В. П., Уржумцев Ю. С. Механика полимерных и композитных материалов – М.: Наука, 1985. – 304 с.
- [194] Красовский Н. Н. Некоторые задачи теории устойчивости движения – М.: Физматлит, 1959.
- [195] Кристенсен Р. Введение в механику композитов – М.: Мир, 1982. – 334 с.
- [196] Крысько В. А., Савельева Н. Е. Статика и динамика замкнутых цилиндрических оболочек при неоднородном нагружении // Проблемы прочности материалов и сооружений на транспорте: Тр. 6 Международ. науч.-техн. конфер., Санкт-Петербург, 28-29 янв., 2004. – СПб, 2004. – С. 210-221.
- [197] Крысько В. А., Щекатурова Т. В. Хаотические колебания конических оболочек // Изв. РАН. Мех. тверд. тела. – 2004. № 5. – С. 153-163.
- [198] Кубенко В. Д., Ковальчук П. С. Влияние начальных несовершенств геометрического характера на колебания и динамическую устойчивость упругих оболочек // Прикл. мех.: Международный научный журнал. – 2004. – 40. № 8. – С. 26-65.
- [199] Куликов Г. М. Нелинейные краевые задачи механики тонкостенных анизотропных конструкций: Автореф. дис. ... докт. физ.-мат. наук. Казань, 1990. – 39 с.

- [200] Куликов Г. М., Кулешов Ю. В. Нелинейные колебания многослойных пластин // Вестн. Тамб. ун-та. Сер. Естеств. и техн. н. – 2004. – 9. № 2. – С. 264-267.
- [201] Кунин И. А. Теория упругих сред с микроструктурой – М.: Наука, 1975. – 415 с.
- [202] Кунцевич С. П. Локальные параметрические колебания тонких оболочек: Автореф. дис. ... канд. физ.-мат. наук. СПб. гос. ун-т, Санкт-Петербург, 2004. – 16 с.
- [203] Купцов В. И. О собственных поперечных колебаниях консольных ортотропных цилиндрических оболочек // Прикладная механика. – 1977. – 13. № 4. – С. 38-44.
- [204] Купцов В. И. Об оценке влияния некоторых свойств композиционного материала на динамические характеристики цилиндрических оболочек // Прикладная механика. – 1979. – 15. № 6. – С. 123-126.
- [205] Курпа Л. В., Онуфриенко О. Г., Шматко Т. В. Вынужденные нелинейные колебания ортотропных пластин сложной формы // Доп. Нац. АН України. – 2005. № 3. – С. 42-46.
- [206] Курпа Л. В., Чистилина А. В. Исследование собственных колебаний многослойных пологих оболочек и пластин сложной формы в плане // Пробл. прочн.: Международный научно-технический журнал. – 2003. № 2. – С. 112-123, 157, 158.
- [207] Курпа Л. В., Шматко А. В. Метод R-функций в задачах о колебаниях пологих оболочек сложной формы в плане // Наукоем. технол. – 2003. – 4. № 8. – С. 60-67.
- [208] Лейзерович Г. С. Влияние начальных неправильностей на колебания круговых цилиндрических оболочек: Автореф. дис. ... докт. техн. наук. Комсомольский-на-Амуре гос. техн. ун-т, Комсомольск-на-Амуре, 2000. – 38 с.

- [209] Леоненко Д.В. Колебания трехслойных стержней и пластин при локальных воздействиях: Автореф. дис. ... канд. техн. наук. Белорус. гос. ун-т трансп., Гомель, 2004 – 21 с.
- [210] Леонтьев В. Л. Вариационно-сеточный метод решения задач о свободных колебаниях упругих пластин // Тр. Средневолж. мат. общ-ва. – 2002. – 3-4. № 1. – С. 72-78.
- [211] Лехницкий С. Г. Анизотропные пластинки. – 2-е изд. перер. и доп. – М.: Гостехтеориздат, 1967. – 463 с.
- [212] Лопатухин А. Л. Колебания и устойчивость подкрепленных оболочек, близких к цилиндрическим: Автореф. дис. ... канд. физ.-мат. наук. СПб. гос. ун-т, Санкт-Петербург, 2001. – 15 с.
- [213] Лурье А. И. Статика тонкостенных упругих оболочек – М.-Л., 1947.
- [214] Лычев С. А. Нестационарные задачи динамики для трехслойных сферических оболочек – Дис. канд. физ.-мат. наук. – Защищена 1999.09.09. УДК 539. 3. – 261 с.
- [215] Ляв А. Математическая теория упругости / Пер. с англ. – М.-Л.: ОНТИ НКТП СССР, 1935. – 475 с.
- [216] Ляпунов А. М. Общая задача об устойчивости движения – М.: Гостехиздат, 1950.
- [217] Майлыбаев А. А. Параметрический резонанс в системах с малой диссипацией // 8 Всероссийский съезд по теоретической и прикладной механике, Пермь, 23-29 авг., 2001: Аннотации докладов. – Екатеринбург, 2001. – С. 409.
- [218] Макаренко И. Н. Устойчивость и колебания сопряженных тонких оболочек и пластин: Автореф. дис. ... канд. физ.-мат. наук. СПб. гос. ун-т, Санкт-Петербург, 2005. – 17 с.
- [219] Мак-Лахлан Н. В. Теория и приложения функции Матъе – М.: Изд-во иностр. лит., 1953. – 475 с.

- [220] Малкин И. Г. Теория устойчивости движения – М.: Наука, 1966.
- [221] Малмейстер А.К, Тамуж В. П., Тетерс Г. А. Сопротивление полимерных и композитных материалов – Рига: Зинатне, 1980. – 571 с.
- [222] Малмейстер А.К, Тамуж В. П., Тетерс Г. А. Сопротивление жестких полимерных материалов – Рига: Зинатне, 1972. – 571 с.
- [223] Мартынович Т. Л., Мартынович Б. Т., Куценко О. В. Собственные поперечные колебания тонкой анизотропной пластины, два противоположных края которой неподвижно закреплены, а два других – свободно оперты // Деп. в ГНТБ Украины 17.06.2003, N 84-Ук2003 – Нац. ун-т „Львов. политехн.“. – Львов, 2003. – 11 с.: ил. – Укр.
- [224] Масленников А. М. Основы динамики и устойчивости стержневых систем – М.; СПб: Изд-во АСВ: Изд-во СПбГАСУ, 2000. – 203 с.: 115 ил., 7 табл. – Рус. – ISBN 5-93093-071-6.
- [225] Матвеев К. А., Пустовой Н. В. Вариационные методы исследования устойчивости анизотропных пластин при температурно-силовом нагружении – Новосибирск: Изд-во НГТУ, 2005. – 368 с.: ил. – (Моногр. НГТУ). – Рус. – ISBN 5-7782-0447-7.
- [226] Мейш В. Ф., Кравченко Н. В. Неосесимметричные колебания неоднородных многослойных дискретно подкрепленных цилиндрических оболочек при нестационарных нагрузках // Прикл. мех. (Киев). – 2003. – 39. № 9. – С. 88-95.
- [227] Мейш В. Ф., Луговой П. З., Штанцель С. Э. Вынужденные нестационарные колебания трехслойной цилиндрической оболочки с продольно-поперечным дискретным ребристым наполнителем // Прикл. мех.: Международный научный журнал. – 2005. – 41. № 2. – С. 60-67.
- [228] Мейш В. Ф., Хамренко Ю. А. Сравнительный анализ динамического поведения трехслойных оболочек в рамках прикладных теорий при

- нестационарных нагружениях // Прикл. мех. (Киев). – 2003. – 39. № 7. – С. 123-130.
- [229] Мейш В. Ф., Шульга Н. А. Вынужденные колебания трехслойных сферических и эллипсоидальных оболочек при осесимметричных нагрузках // Мех. композит. матер. – 2003. – 39. № 5. – С. 659-670.
- [230] Меньков Г. Б. Функциональное нормирование при численном решении задач механики деформирования оболочек вращения // Архитектура оболочек и прочностной расчет тонкостенных строительных и машиностроительных конструкций сложной формы: Тр. Междунар. науч. конф., Москва, 4-8 июня, 2001. – М., 2001. – С. 265-270.
- [231] Меркин Д. Р. Введение в теорию устойчивости движения – 1987.
- [232] Миргородский А. В. Численное исследование колебаний однослойных и многослойных оболочек в геометрически нелинейной постановке: Автореф. дис. ... канд. техн. наук. Моск. гос. строит. ун-т, Москва, 2004. – 23 с.
- [233] Михайловский Е. И. Игнорирование гипотез Кирхгофа в нелинейной теории жесткогибких оболочек // Нелинейн. пробл. мех. и физ. деформир. тверд. тела – СПб. гос. ун-т., 2000. – № 2. – С. 131-160.
- [234] Михайловский Е. И. Некоторые модели и методы нелинейной механики тонких упругих оболочек // Нелинейн. пробл. мех. и физ. деформир. тверд. тела – СПб. гос. ун-т., 2001. – № 4. – С. 42-56.
- [235] Михайловский Е. И., Черных К. Ф. Развитие механики оболочек в трудах школы академика В. В. Новожилова // Успехи механики. – 2003. № 3. – С. 87-126.
- [236] Михайловский Е. И., Черных К. Ф. Актуальные задачи нелинейной механики тонких упругих оболочек // Нелинейн. пробл. мех. и физ. деформир. тверд. тела. – СПб. гос. ун-т., 1998. – № 1. – С. 234-255, 260, 265.

- [237] Михлин С. Г. Вариационные методы в математической физике – М.: Наука, 1970. – 512 с.
- [238] Мишенков Г. В. О динамической устойчивости пологих упругих оболочек // Инженерный журнал – 1961. – 1. № 2. – С. 112-118.
- [239] Мовсисян Л. А. К динамической устойчивости пластин с начальным моментным состоянием // Проблемы механики тонких деформируемых тел: Сборник: Посвящается 80-летию академика НАН Армении С. А. Амбарцумяна / Ин-т мех. НАН Армении. – Ереван, 2002. – С. 224-232.
- [240] Мовсисян Л. А., Нерсисян Г. Г. Об устойчивости вязкоупругой цилиндрической оболочки при движущейся нагрузке // Изв. АН Армении. Мех. – 2003. – 56. № 2. – С. 28-32.
- [241] Мочалин А. А., Мочалин П. А. Собственные колебания цилиндрической ортотропной оболочки переменной толщины и плотности // Современные проблемы нелинейной механики конструкций, взаимодействующих с агрессивными средами: Сб. науч. тр. межвузовской конференции, Саратов, 2000. – Саратов, 2000. – С. 164-166.
- [242] Муштари Х. М. Нелинейная теория оболочек – М.: Наука, 1990. – 223 с.
- [243] Муштари Х. М., Галимов К. З. Нелинейная теория упругих оболочек – Казань: Таткнигоиздат, 1957. – 431 с.
- [244] Мэттьюз Ф., Ролингс Р. Композитные материалы. Механика и технология – М.: Техносфера, 2004. – 407 с.
- [245] Нарусберг В. Л. О параметрических колебаниях ортотропной цилиндрической оболочки с упругим наполнителем. 1. Постановка задачи // Механика полимеров. – 1974. № 3. – С. 470-478.

- [246] Нарусберг В. Л. Устойчивость и оптимальное проектирование ортотропных цилиндрических оболочек с наполнителем при осевом сжатии: Автореф. дис. ... канд. физ.-мат. наук. Рига, 1975. – 23 с.
- [247] Нарусберг В. Л., Тетерс Г. А. Устойчивость и оптимизация оболочек из композитов – Рига: Зинатне, 1988. – 297 с.
- [248] Немировский Ю. В. Устойчивость и выпучивание конструктивно анизотропных и неоднородных оболочек и пластин // Итоги науки и техники. МДТТ. – М.: ВИНТИ, 1976. – Т. 9. – С. 5-154.
- [249] Немировский Ю. В. К теории термоупругого изгиба армированных оболочек и пластин // Механика полимеров. – 1972. № 5. – С. 861-873.
- [250] Немировский Ю. В. Об упругопластическом поведении армированного слоя // ПМТФ. – 1969. № 6. – С. 81-89.
- [251] Немировский Ю. В. Уравнения изгиба и устойчивости армированных оболочек и пластин из вязкоупругого материала // Динамика сплошной среды. Вып. 4. – Новосибирск: Изд-во ин-та гидродинамики СО РАН, 1970. – С. 50-63.
- [252] Немировский Ю. В., Андреев А. Н. К теории упругих многослойных анизотропных оболочек // Тр. межд. симпозиума «Тонкостенные элементы и строительные конструкции», Лодзь, 1976. – № 5. – С. 191-218.
- [253] Немировский Ю. В., Резников Б. С. Прочность элементов конструкций из композитных материалов – Новосибирск: Наука. Сибирское отделение, 1986. – 165 с.
- [254] Немировский Ю. В., Самсонов В. И. Устойчивость слоистых композитных оболочек при динамическом нагружении // Устойчивость в механике деформируемого твердого тела: Материалы 2-го Всесоюз. симпоз. Калинин, 1986. – С. 138-143.

- [255] Немировский Ю. В., Самсонов В. И., Шульгин А. В. Динамическая термоустойчивость композитных оболочек слоистой структуры // ПМТФ. – 1995. – 36. № 5. – С. 164-172.
- [256] Немировский Ю. В., Янковский А. П. Численное интегрирование динамических задач теории оболочек методами Рунге-Кутты // Численные методы решения задач теории упругости и пластичности: Труды 16-й Межреспубликанской конференции, Новосибирск, 6-8 июля, 1999. – Новосибирск, 1999. – С. 117-124.
- [257] Нерубайло А. Б., Нерубайло Б. В. Обобщение уравнений Власова для цилиндрической оболочки на случай трансверсально-изотропного материала // Прикл. мех. и техн. физ. – 2005. – 46. № 4. – С. 125-132.
- [258] Никабадзе М. У. Современное состояние многослойных оболочечных конструкций // Деп. в ВИНТИ 30.12.2002, N 2289-B2002. МГУ. – М., 2002. – 80 с.
- [259] Никулин М. В. Собственные колебания гладких и конструктивно-анизотропных цилиндрических оболочек при наличии статических нагрузок // В кн.: Прочность и динамика авиационных двигателей. – М.: Машиностроение, 1965. – Вып. 2. – С. 52-128.
- [260] Новичков Ю. Н. Нелинейная теория и устойчивость толстых многослойных оболочек // Прикладная математика и механика. – 1973. – 37. № 3. – С. 532-543.
- [261] Новичков Ю. Н. Распространение волн в слоистых цилиндрических оболочках // Изв. АН СССР. МТТ. – 1973. № 2. – С. 51-60.
- [262] Новожилов В. В. Краткий очерк развития теории оболочек в СССР // Исследования по теории оболочек и пластин. – Казань: Изд-во Казан. ун-та, 1970. – Вып. 6-7 – С. 5-22.
- [263] Новожилов В. В. Расчет оболочек тел вращения // Изв. АН СССР, ОТН. – 1946. № 7. – С. 949-962.

- [264] Новожилов В. В. Теория тонких оболочек – 2-е изд. испр. и доп. – Л.: Судостроение, 1962. – 431 с.
- [265] Новожилов В. В. Теория упругости – Л.: Судпромгиз, 1956. – 372 с.
- [266] Новожилов В. В. Развитие метода комплексного преобразования в линейной теории оболочек за 50 лет // Теория оболочек и пластин. – Ереван: Изд-во АН АрмССР, 1964. – С. 107-115.
- [267] Новожилов В. В. О перспективах феноменологического подхода к проблеме разрушений // Механика деформируемых тел и конструкций. – М.: Машиностроение, 1975. – С. 349-359.
- [268] Новожилов В. В., Черных К. Ф., Михайловский Е. И. Линейная теория тонких оболочек – Л.: Политехника, 1991. – 656 с.
- [269] Образцов И. Ф., Васильев В. В., Бунаков В. А. Оптимальное армирование оболочек вращения из композитных материалов – М: Машиностроение, 1977. – 144 с.
- [270] Огибалов П. М. Изгиб, устойчивость и колебания пластинок – М.: Изд-во МГУ, 1958. – 389 с.
- [271] Огибалов П. М. Вопросы динамики и устойчивости оболочек – М.: Изд-во МГУ, 1963. – 420 с.
- [272] Огибалов П. М., Грибанов В. Ф. Термоустойчивость пластин и оболочек – М.: МГУ, 1968. – 520 с.
- [273] Огибалов П. М., Колтунов М. А. Оболочки и пластины – М.: Изд-во МГУ, 1969. – 695 с.
- [274] Огибалов П. М., Ломакин В. А., Кишкин Б. П. Механика полимеров – М.: Изд-во МГУ, 1975. – 520 с.
- [275] Огибалов П. М., Суворова Ю. В. Механика армированных пластиков – М.: Изд-во МГУ, 1965. – 480 с.

- [276] Окладникова Е. В. Колебания и устойчивость пологих трехслойных оболочек с изломами поверхности: Автореф. дис. ... канд. техн. наук. СПб. гос. архит.-строит. ун-т, Санкт-Петербург, 2005. – 23 с.
- [277] Павилайнен В. Я. Развитие теории оболочек в трудах В. В. Новожилова // В сб.: Тр. науч.-техн. конф. «Новожиловские чтения». СПб, ЦНИИ им. А. Н. Крылова, 1988. – С.47-53.
- [278] Паймушин В. Н. Классические и неклассические задачи динамики трехслойных оболочек с трансверсально-мягким наполнителем // Мех. композит. матер. – 2001. – 37. № 3. – С. 289-306.
- [279] Паймушин В. Н., Иванов В. И., Хусаинов В. Р. Анализ свободных и собственных колебаний трехслойной пластины на основе уравнений уточненной теории // Мех. композиц. матер. и конструкций. – 2002. – 8. № 4. – С. 543-554.
- [280] Паймушин В. Н., Луканкин С. А. Классификация многослойных оболочек по геометрическим параметрам, характеризующим относительные толщины слоев и их изменяемость // Вестн. Нижегород. ун-та. Сер. Мех. – 2002. № 1. – С. 86-95. – Рус.; рез. англ.
- [281] Паймушин В. Н., Хусаинов В. Р. Уточненная теория трехслойных пластин и оболочек для исследования динамических процессов деформирования с большими показателями изменяемости // Мех. композиц. матер. и конструкций. – 2001. – 7. № 2. – С. 215-235.
- [282] Паймушин В. Н., Хусаинов В. Р. Уравнения и классификация свободных и собственных колебаний симметричных по толщине трехслойных пластин с трансверсально-мягким наполнителем // Мех. композиц. матер. и конструкций. – 2001. – 7. № 3. – С. 310-317.
- [283] Паймушин В. Н., Шалашилин В. И. Уточненные уравнения среднего изгиба трехслойных оболочек и сдвиговые формы потери устойчивости // Докл. АН. – 2003. – 392. № 2. – С. 195-200.

- [284] Пелех Б. Л. Теория оболочек с конечной сдвиговой жесткостью – Киев: Наук думка, 1982. – 248 с.
- [285] Пелех Б. Л., Сухорольский М. А. Контактные задачи теории упругих анизотропных оболочек – Киев: Наук. думка, 1980. – 214 с.
- [286] Пелех Б. Л., Тетерс Г. А. О динамическом изгибе пластинок, слабо сопротивляющихся сдвигу // Механика полимеров. – 1968. № 4.
- [287] Петрушева И. И. Свободные колебания упругого многослойного сферического пояса // Вестник КузГТУ. – 2005. № 1(45). – С. 10-16.
- [288] Петрушева И. И. Определение областей динамической неустойчивости слоистой упругой цилиндрической оболочки при осевом нагружении // Вестник КузГТУ. – 2006. № 1(52). – С. 7-14.
- [289] Петрушева И. И. Свободные колебания слоистой упругой композитной цилиндрической оболочки // Численные методы решения задач упругости и пластичности: Тр. XVIII Межресп. конфер., Кемерово, 1-3 июля 2003 г. / Под ред. В. М. Фомина. – Новосибирск: Изд-во «Нонпарель», 2003. 246 с. – С. 140-145.
- [290] Петрушева И. И. Свободные колебания упругой многослойной цилиндрической оболочки // Вестник КузГТУ. – 2003. № 3. – С. 9-17.
- [291] Петрушева И. И. Определение областей динамической неустойчивости слоистой упругой цилиндрической оболочки // Численные методы решения задач упругости и пластичности: Тр. XIX Всерос. конфер., Бийск, 28-31 августа 2005 г. / Под ред. В. М. Фомина. – Новосибирск: Изд-во «Нонпарель», 2005. 300 с. – С. 218-223.
- [292] Пикуль В. В. Теория и расчет оболочек вращения – М.: Наука, 1982. – 158 с.
- [293] Пикуль В. В. Современные проблемы механики оболочек // Проблемы механики тонких деформируемых тел: Сборник: Посвящается 80-

летию академика НАН Армении С. А. Амбарцумяна / Ин-т мех. НАН Армении. – Ереван, 2002. – С. 250-258.

- [294] Пикуль В. В. Современное состояние и перспективы развития теории оболочек // Проблемы механики сплошных сред и элементов конструкций: Сб. науч. тр. / Ин-т автомат. и процессов упр. ДВО РАН. – Владивосток, 1998. – С. 27-44.
- [295] Победря Б. Е. Механика композитных материалов – М.: Изд-во МГУ, 1984. – 336 с.
- [296] Победря Б. Е. Численные методы в теории упругости и пластичности: Учебное пособие. – 2-е изд. – М.: Изд-во МГУ, 1995. – 366 с. – ISBN 5-211-03077-X.
- [297] Поляков В. А., Розе А. В., Хитров В. В. Осесимметричный изгиб и выпучивание круглых пластин, из материалов, армированных волокнами // Тр. VII Всесоюз. конф. по теории пластин и оболочек. – М., 1970.
- [298] Постнов В. А., Тарануха Н. А. Метод модуль-элементов в расчетах прочности, устойчивости и колебаний сложных оболочечных конструкций // Механика оболочек и пластин: Сб. докл. 19 Междун. конф. по теории оболочек и пластин, Нижний Новгород, 28-30 сент., 1999. – Н. Новгород, 1999. – С. 12-15.
- [299] Прусаков А. П. Основные уравнения изгиба и устойчивости ортотропных трехслойных пластин с легким наполнителем // Изв. вузов. Строительство и архит. – 1960. № 5. – С. 9-17.
- [300] Рассказов А. О. К теории колебаний многослойных ортотропных оболочек // Прикладная механика. – 1977. – 13. № 8. – С. 23-29.
- [301] Рассказов А. О., Соколовская И. И., Шульга Н. А. Теория и расчет слоистых ортотропных пластин и оболочек – Киев: Вища шк., 1986. – 191 с.

- [302] Рейснер Э., Фынъ Юань-чжен, Секлер Е. Е. Упругие оболочки – М.: Иностранная литература, 1962. – 152 с.
- [303] Релей Д. В. Теория звука. Т. 1. – М.: Гостехиздат, 1940. – 499 с.
- [304] Рикардс Р. Б. Методы конечных элементов в теории оболочек и пластин – Рига: Зинатне, 1988. – 284 с.
- [305] Рикардс Р. Б., Тетерс Г. А. Устойчивость оболочек из композитных материалов – Рига: Зинатне, 1974. – 310 с.
- [306] Рихтмайер Р., Мортон К. Разностные методы решения краевых задач / Под ред. Б. М. Будака и А. Д. Горбунова. – М.: Мир, 1972. – 418 с.
- [307] Розе А. В., Хитров В. В. Устойчивость кольцевых трансверсально-изотропных пластин, слабо сопротивляющихся сдвигу // Механика полимеров. – 1969. № 5.
- [308] Сабирова Р. С. Собственные колебания анизотропной цилиндрической оболочки // В кн.: Исследования по теории пластин и оболочек. Казань, 1967. – Вып. 5. – С. 424-432.
- [309] Самсонов В. И. Нелинейное деформирование и устойчивость КМ-оболочек при статических и динамических воздействиях: Автореф. ... докт. физ.-мат. наук. Новосибирск, 1994. – 39 с.
- [310] Самсонов В. И. Оптимизация частот свободных колебаний армированной цилиндрической оболочки // В кн.: Динамика сплошной среды. Новосибирск, 1979. – № 43. – С. 173-177.
- [311] Самсонов В. И., Шульгин А. В. Об устойчивости композитных оболочек при термодинамических нагружениях // Изв. вузов. стр-во. – 2001. № 2-3. – С. 27-31, 145.
- [312] Саркисян Л. С. Определение частот собственных колебаний трехслойной ортотропной полосы несимметричного строения // Механика оболочек и пластин: Сб. докл. 19 Междунар. конф. по теории обо-

- лочек и пластин, Нижний Новгород, 28-30 сент., 1999. – Н. Новгород, 1999. – С. 182-186.
- [313] Сегерлинд Л. Применение метода конечных элементов / Пер. с англ. – М.: Мир, 1979. – 392 с.
- [314] Семенюк Н. П. Об уравнениях геометрически нелинейной теории оболочек типа Тимошенко // Прикладная механика. – 1978. – 14. № 2. – С. 128-132.
- [315] Сеницкий Ю. Э. Теорема разложения по собственным вектор-функциям в динамической теории упругости // Вестник СамГТУ, Механика. – 2000. № 4.
- [316] Сеницкий Ю. Э., Козьма И. Е. К решению осесимметричной динамической задачи для неоднородной по толщине цилиндрической оболочки с конечной сдвиговой жесткостью // Изв. вузов. стр-во. – 2005. № 2. – С. 8-18.
- [317] Сибиряков А. В. Динамика слоистых пластин и оболочек при импульсном нагружении: Автореф. дис. ... докт. техн. наук. МАТИ, Москва, 2003. – 29 с.
- [318] Синицын Е. Н. Методическое и программное обеспечение расчетов на устойчивость // 2 Науч. конфер. по механике и прочности конструкций, посвященная 80-летию академика Е. А. Негина, Саров, 10-12 янв., 2001: Сборник докладов. – Саров, 2002. – С. 53-63.
- [319] Скудра А. М., Булавс Ф. Я. Прочность армированных пластиков – М.: Химия, 1982. – 213 с.
- [320] Слепцов А. Г., Шепеленко В. Н. Пакет программ решения многоточечных краевых задач для систем обыкновенных дифференциальных уравнений: Препринт – № 8-88. СО АН СССР. ИТПМ. Новосибирск, 1988.

- [321] Слепьян Л. И., Черных К. Ф. Механика сплошных сред и конструкций в трудах академика В. В. Новожилова – М.: Изд-во Ин-та проблем механики АН СССР, 1985. препринт № 247. – 58 с.
- [322] Соколкин Ю. В., Ташкинов А. А. Механика деформирования и разрушения структурно-неоднородных сред – М.: Наука, 1984. – 115 с.
- [323] Старовойтов Э. И., Громько Ю. В. Резонансные колебания кольцевой трехслойной пластины // Матер., технол., инструм. – 2004. – 9. № 1. – С. 7-10.
- [324] Старовойтов Э. И., Леоненко Д. В., Яровая А. В. Колебания круглых трехслойных пластин под действием поверхностных нагрузок различной формы // Пробл. прочн. – 2003. № 4. – С. 32-39, 150.
- [325] Стретт М. Д. О. Функции Ламе, Матье и родственные им в физике и технике – Харьков-Киев: ОНТИ, 1935. – 238 с.
- [326] Сухинин С. Н. Прикладные модели и критерии их применимости к исследованию устойчивости многослойных композитных оболочек // Избранные проблемы прикладной механики и математики: Сб. науч. работ «Прикладная и вычислительная математика», посвященный 80-летию чл.-корр. РАН Э. И. Григолюка / Моск. гос. техн. ун-т МАМИ. – М., 2003. – С. 273-284, 315-316.
- [327] Тамуж В. П., Тетерс Г. А. Изгиб и устойчивость нелинейно-упругих ортотропных пластинок // Изв. АН ЛатвССР. Сер. физ. и тех. наук. – 1965. № 6.
- [328] Тарануха Н. А., Лейзерович Г. С. Динамика «неправильных оболочек» – Владивосток: Дальнаука, 2005. – 423 с.: ил. – Рус.; рез. англ. – ISBN 5-8044-0522-5.
- [329] Тарнопольский Ю. М. Прикладные задачи теории упругости конструктивно-анизотропного материала – Докт. дис. – М., 1967.

- [330] Тарнопольский Ю. М., Розе А. В. Особенности расчета деталей из армированных пластиков – Рига: Зинатне, 1969.
- [331] Ташкинов А. А., Соколкин Ю. В., Вильдеман В. Э. Механика неупругого деформирования и разрушения композиционных материалов – М.: Наука, Физматлит, 1997. – 288 с.
- [332] Тетерс Г. А. Влияние ортотропии материала на устойчивость неупругих пластинок с учетом деформации поперечных сдвигов // Механика полимеров. – 1965. № 2.
- [333] Тетерс Г. А., Пелех Б. Л. Устойчивость анизотропных пологих сферических оболочек при ползучести с учетом деформаций поперечных сдвигов // Механика полимеров. – 1966. № 6.
- [334] Тетерс Г. А., Тамуж В. П., Лагздинь А. Ж., Крегерс А. Ф. Метод ориентационного усреднения в механике материалов – Рига: Зинатне, 1989. – 189 с.
- [335] Тимошенко С. П. Устойчивость стержней, пластин и оболочек. Избранные работы – М.: Наука, 1971. – 807 с.
- [336] Тимошенко С. П. Статические и динамические проблемы теории упругости – Киев: Наукова думка, 1975. – 563 с.
- [337] Тимошенко С. П. Прочность и колебания элементов конструкций – М.: Наука, 1975. – 704 с.
- [338] Тимошенко С. П., Войновский-Кригер С. Пластинки и оболочки – Пер. с англ. – М.: Наука, 1966. – 635 с.
- [339] Товстик П. Е. О плотности частот колебаний тонких оболочек вращения // ПММ. – 1972. т. 36. – Вып. 2. – С. 291-300.
- [340] Товстик П. Е. Устойчивость тонких оболочек. Асимптотические методы – М.: Наука, 1995. – 320 с.
- [341] Троценко Ю. В. О применении модели балки Тимошенко в задаче о собственных неосесимметричных колебаниях цилиндрической обо-

- лочки с присоединенным твердым телом // Акуст. вісн. – 2003. – 6. № 4. – С. 54-64.
- [342] Трушин С. И. Определение собственных частот и форм колебаний пластин из композиционного материала методом итераций в подпространстве // Вестн. Рос. ун-та дружбы народов. Сер. Инж. исслед. – 2002. № 1. – С. 102-106.
- [343] Угодчиков А. Г., Хуторянский Н. М. Метод конечных элементов в механике деформируемого твердого тела – 1986. – 295 с.
- [344] Уилкинсон Дж. Алгебраическая проблема собственных значений – М.: Наука, 1970
- [345] Филин А. П. Элементы теории оболочек. 3-е изд. – Л.: Стройиздат, 1987. – 383 с.
- [346] Филиппов А. П., Кохманюк С. С., Янютин Е. Г. Деформирование элементов конструкций под действием ударных и импульсных нагрузок – Киев: Наук. Думка, 1978. – 184 с.
- [347] Флюгге В. Статика и динамика оболочек / перевод с нем. под ред. А. П. Филина – М.: Госстройиздат, 1961. – 306 с.
- [348] Фомин В. П. Устойчивость слоистой пластинки. Анализ теорий поперечного сдвига третьего порядка // Тр. ЦАГИ. – 2002. – № 2658. – С. 173-185.
- [349] Хамренко Ю.А. Нестационарные колебания трехслойных оболочек вращения при осесимметричных нагрузках: Автореф. дис. ... канд. физ.-мат. наук. Ин-т механіки ім. С. П.Тимошенка НАН України. Київ, 2001. – 16 с.
- [350] Хечумов Р. А., Кепплер Х., Прокопьев В. И. Применение метода конечных элементов к расчету конструкций – Из-во АСВ, 1994. – 352 с.
- [351] Челомей В. Н. Динамическая устойчивость элементов авиационных конструкций – Изд-во Аэрофлот, 1939.

- [352] Черных К. Ф. Введение в анизотропную упругость – М.: Наука, 1988. – 180 с.
- [353] Черных К. Ф. Линейная теория оболочек. ч. 2 Некоторые вопросы теории – Л.: Изд-во ЛГУ, 1964. – 395 с.
- [354] Черных К. Ф. Простой краевой эффект и расчленение граничных условий в линейной теории тонких оболочек // Изв. АН СССР. Механика. – 1965. № 1. – С. 89-98.
- [355] Четаев Н. Г. Устойчивость движения – М.: Гостехиздат, 1955.
- [356] Шарыпов Д. В. Колебания и устойчивость подкрепленных цилиндрических оболочек: Автореф. дис. ... канд. физ.-мат. наук. СПб. гос. ун-т, Санкт-Петербург, 2001. – 16 с.
- [357] Швейко Ю. Ю., Гаврилов Ю. В., Брусиловский А. Д. О влиянии граничных условий на спектр собственных частот цилиндрических оболочек // В кн.: Докл. науч.-технич. конфер. МЭИ по итогам науч.-исслед. работ за 1964-1965 гг. Секция энергомашиностроения. – М., 1965. – С. 131-148.
- [358] Шереметьев М. П., Пелех Б. Л. К построению уточненной теории пластин // Инж. журнал. – 1964. – 4. № 3.
- [359] Шермергор Т. Д. Теория упругости микронеоднородных сред – М.: Наука, 1977. – 339 с.
- [360] Шиповский И. Я., Хованец В. А., Машков А. В., Лукасик В. А. Численные методы расчета оболочек // Деп. в ВИНТИ 19.10.2001, N2190-B2001 – Волгогр. гос. техн. ун-т. – Волгоград, 2001. – 23 с.
- [361] Шкутин Л. И. Численный анализ осесимметричных форм выпучивания конических оболочек // Прикл. мех. и техн. физ. – 2001. – 42. № 6. – С. 159-165.
- [362] Шмидт Г. Параметрические колебания / Под ред. М. З. Литвина-Седого. – М.: Мир, 1978. – 336 с.

- [363] Эшматов Б. Х. Динамическая устойчивость вязкоупругих пластин при возрастающих сжимающих нагрузках // ПМТФ. – 2006. – 47. № 2. – С. 165-175.
- [364] Эшматов Х., Абдикаримов Р. А., Ахмаджонов Д. Г. Устойчивость вязкоупругой ортотропной цилиндрической оболочки на базе обобщенной теории С. П. Тимошенко при динамическом приложении осевого сжатия // Тезисы докл. Респуб. науч. конф. Математическое моделирование и вычислительный эксперимент. – 2002. – С. 121.
- [365] Якубович В. А., Стражинский В. М. Параметрический резонанс в линейных системах – М.: Наука, 1987. – 328 с.
- [366] Якубович В. А., Стражинский В. М. Линейные дифференциальные уравнения с периодическими коэффициентами и их приложения – М.: Наука, 1972. – 718 с.
- [367] Якушев В. Л. Нелинейные деформации и устойчивость тонких оболочек – М.: Наука, 2004. – 278 с. – Рус. – ISBN 5-02-032837-5.
- [368] Труды VII Всесоюзной конференции по теории оболочек и пластин, Днепропетровск, 1969. – М.: Наука, 1970. – 670 с.
- [369] Прочность и жесткость тонкостенных конструкций: Сб. трудов / Ред. И. Г. Терегулов. – Л., 1975. – 218 с.
- [370] Вибрации в технике: Справочник в 6 т., Т. 1. Колебания линейных систем / Под ред. В. В. Болотина. – М.: Машиностроение, 1978. – 352 с.
- [371] Расчет упругих конструкций с использованием ЭВМ в 2 т / Под ред. А. П. Филина. – Л.: Судостроение, 1974. – Т. 1. – 308 с.; Т. 2. – 312 с.
- [372] Численные и экспериментальные методы исследования прочности, устойчивости и колебаний конструкций летательных аппаратов: Темат. сб. науч. тр. МАИ / Пред. ред. коллег. И. Ф. Образцов. – М., 1983. – 85 с.

- [373] Композитные материалы: в 8 т. Т. 2: Механика композиционных материалов / Под ред. Дж. Сендецки пер. с англ. Под ред. Л. Браутмана. – М.: Мир, 1978. – 564 с.
- [374] Композитные материалы: в 8 т. Т. 2: Механика композиционных материалов / Под ред. В. В. Васильева и Ю. М. Тарнопольского. – М.: Машиностроение, 1990. – 510 с.
- [375] Методы сеток и начальных параметров в задачах устойчивости и колебаний: Учебное пособие / Н. П. Абовский, В. И. Савченков. – Красноярск, 1969.
- [376] Актуальные проблемы механики оболочек – Казань: Нов. Знание, 2000. – 486 с.: ил. – Рус. – ISBN 5-89347-068-0.
- [377] Метод конечных элементов в статике, динамике и устойчивости пространственных тонкостенных подкрепленных конструкций: Учебное пособие / В. П. Агапов. – М.: Изд. АСВ, 2000. – 152 с.
- [378] Метод конечных элементов в задачах строительной механики летательных аппаратов: Учеб. пособие для студентов авиац. спец. Вузов / И. Ф. Образцов, Л. М. Савельев, Х. С. Хазанов. – М.: Высш. шк., 1985. – 392 с.
- [379] Расчет пластинок на прочность и устойчивость методом сеток: Учебное пособие / В. В. Чуватов. – Свердловск: Издание УПИ, 1972.
- [380] Обыкновенные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами: Учебное пособие / С. К. Годунов. – Новосибирск: Изд-во НГУ, 1994. – N.1: Краевые задачи. – 264 с. – ISBN 5-7615-0014-0.
- [381] Сборник «Инженерные сооружения и строительная механика», изд-во «Путь», 1924.
- [382] Сборник «Исследование колебаний конструкций», ДНТВУ, 1935.
- [383] Труды Азерб. Гос. Ун-та, сер. Матем. – 1942. – Вып. 1.

- [384] Arnold R. N., Warburton G. B. The flexural vibrations of thin cylinders // Proc. Inst. Mech. Eng. Ser. A – 1953. – Vol.167. № 1. – P. 62-74.
- [385] Bert C. W. Vibration of composite structures // In: Recent advances in structure dynamics. Papers intern. conf. Southampton. – 1980. – Vol. 2. – P. 693-712.
- [386] Bert C. W., Baker J. L., Egle D. M. Free vibrations of multilayer anisotropic cylindrical shells // J. Composite Materials. – 1969. – Vol. 3. № 3. – P. 480-499.
- [387] Carrera Erasmo, Demasi Luciano Классические и усовершенствованные многослойные пластинчатые элементы на основе PVD и RMVT. Ч. 1. Вывод конечноэлементных матриц. Classical and advanced multilayered plate elements based upon PVD and RMVT. Pt 1. Derivation of finite element matrices // Int. J. Numer. Meth. Eng. – 2002. – 55. № 2. – P. 191-231. – Англ.
- [388] Carrera Erasmo, Demasi Luciano Классические и усовершенствованные многослойные пластинчатые элементы на основе PVD и RMVT. Ч. 2. Численные приложения. Classical and advanced multilayered plate elements based upon PVD and RMVT. Pt 2. Numerical implementations // Int. J. Numer. Meth. Eng. – 2002. – 55. № 3. – P. 253-291. – Англ.
- [389] Carrere Erasmo Разработки, идеи и оценки на основе смешанной вариационной теоремы Рейсснера в моделировании многослойных пластин и оболочек. Developments, ideas, and evaluations based upon Reissner's Mixed Variational Theorem in the modelling of multilayered plates and // Appl. Mech. Rev. – 2001. – 54. № 4. – P. 301-329. – Англ.
- [390] Chen Yu-Ren, Chen Lien-Wen Осесимметричный параметрический резонанс полярно ортотропных трехслойных кольцевых пластин. Axisymmetric parametric resonance for polar orthotropic sandwich

- annular plates // *Compos. Struct.* – 2004. – 65. № 3-4. – P. 269-277. – Англ.
- [391] Dong S. B., Tso F. K. W. On a laminated orthotropic shells theory, including transverse shear deformation // *J. Appl. Mech. Trans. ASME Ser. E.* – 1972. – Vol. 94. № 4. – P. 1091-1097.
- [392] Dumir P. C., Dube G. P., Mallick A. Осесимметричная потеря устойчивости слоистого толстого кольцевого сферического купола. Axisymmetric buckling of laminated thick annular spherical cap // *Commun. Nonlinear Sci. and Numer. Simul.* – 2005. – 10. № 2. – P. 191-204. – Англ.
- [393] Flugge W. Die Stabilitat der Kreiszyinderschale // *Jng. Arch.* – 1932. – 4. № 5. – P. 463-506.
- [394] Forsberg K. Influence of boundary conditions on the modal characteristics of thin cylindrical shells // *AIAA J.* – 1964. – Vol. 2. № 2. – P. 2150-2157.
- [395] Gilat Rivka, Aboudi Jacob Экспоненты Ляпунова как количественный критерий динамической потери устойчивости композитных пластин. The Lyapunov exponents as a quantitative criterion for the dynamic buckling of composite plates // *Int. J. Solids and Struct.* – 2002. – 39. № 2. – P. 467-481. – Англ.
- [396] Greenberg J. B., Stavsky Y. Buckling and vibration of orthotropic composite cylindrical shells // *Acta. Mech.* – 1980. – Vol. 36. № 1/2-3/4. – P. 15-29.
- [397] Greenberg J. B., Stavsky Y. Vibrations of laminated filament-wound cylindrical shells // *AIAA J.* – 1981. – Vol. 19. № 8. – P. 1055-1062.
- [398] Jones R. M., Morgan H. S. Buckling and vibration of cross-ply laminated circular cylindrical shells // *AIAA J.* – 1975. – Vol. 13. № 5. – P. 664-671.

- [399] Khare Rakesh Kumar, Kant Tarun, Garg Ajay Kumar Свободные колебания слоистых трехслойных конструкций с использованием оболочечного элемента высокого порядка для лицевых слоев. Free vibration of composite and sandwich laminates with a higher-order facet shell element // Compos. Struct. – 2004. – 65. № 3-4. – P. 405-418. – Англ.
- [400] Krivoshapko S. N. Статика, колебания и выпучивание и приложения к тонкостенным гиперболическим оболочкам вращения. Static, vibration, and buckling analyses and applications to one-sheet hyperboloidal shells of revolution // Appl. Mech. Rev. – 2002. – 55. № 3. – P. 241-270. – Англ.
- [401] Kutug Z., Yahnioğlu N., Akbarov S. D. Анализ потери устойчивости упругой и вязкоупругой композитных круговых пластин в рамках трехмерной линеаризованной теории. The loss of stability analyses of an elastic and viscoelastic composite circular plate in the framework of three-dimensional linear // Eur. J. Mech. A. – 2003. – 22. № 3. – P. 475-488. – Англ.
- [402] Lee Doo-Sung Нелинейная динамическая потеря устойчивости ортотропных цилиндрических оболочек при импульсных нагрузках. Nonlinear dynamic buckling of orthotropic cylindrical shells subjected to rapidly applied loads // J. Eng. Math. – 2000. – 38. № 2. – P. 141-154. – Англ.
- [403] Mirsky I. Vibrations of orthotropic, thick, cylindrical shells – J. Acoustical Soc. Amer. – 1964. – Vol.36. №1. – P. 41-51.
- [404] Narisawa Tetsuya Исследование свободных колебаний слоистых композитных цилиндрических оболочек с использованием показателей эквивалентной кривизны по уточненному асимптотическому методу. A study on refined analytical method for free vibration analysis of

- laminated compositi // JSME Int. J. C. – 2002. – 45. № 1. – P. 32-39. – Англ.
- [405] Nemoto Keiichi, Kasuya Hirakazu, Yamagishi Yasuji Расчет на динамическую устойчивость композитных слоистых цилиндрических оболочек под действием периодического внешнего давления // Trans. Jap. Soc. Mech. Eng. A. – 2003. – 69. № 679. – P. 138-143. – Яп.; рез. англ.
- [406] Ng T. Y., Lam K. Y., Liew K. M., Reddy J. N. Расчет динамической устойчивости функционально градиентных цилиндрических оболочек в условиях периодического осевого нагружения. Dynamic stability analysis of functionally graded cylindrical shells under periodic axial loading // Int. J. Solids and Struct. – 2001. – 38. № 8. – P. 1295-1309. – Англ.
- [407] Qatu Mohamad S. Новые исследования динамического поведения оболочек. 1989-2000. Ч. 1. Слоистые композитные оболочки. Recent research advanced in the dynamic behavior of shells: 1989-2000. Pt 1. Laminated composite shells // Appl. Mech. Rev. – 2002. – 55. № 4. – P. 325-350. – Англ.
- [408] Qatu Mohamad S. Новые успехи исследования динамического поведения оболочек: 1989-2000. Ч. 2. Однородные оболочки. Recent research advances in the dynamic behavior of shells: 1989-2000. Part 2. Homogeneous shells // Appl. Mech. Rev. – 2002. – 55. № 5. – P. 415-434. – Англ.
- [409] Reisner E. On the theory of bending of elastic plates // J. Math. A. Phys. – 23. 1944. – P. 1.
- [410] Reisner E. Stresses and small displacements of shallow spherical shells // J. Math. A. Phys. – 25. 1946. – P. 80-85.

- [411] Shang Xin-chun Точный расчет свободных колебаний композитной оболочечной структуры – герметичного резервуара. An exact analysis for free vibration of a composite shell structure hermetic capsule // Appl. Math. and Mech. Engl. Ed. – 2001. – 22. № 9. – P. 1035-1045. – Англ.
- [412] Timoshenko S. P. On the correction for shear of the differential equation for transverse vibration of prismatic bars // Rhylos. Mag. – 1921. – Vol. 41. – Pp 744–746.
- [413] Timoshenko S. P. Theory of plates and shells – New York. Mc Graw-Hill, 1940. – 440 p.
- [414] Ugrimov S. V. Обобщенная теория многослойных пластин. Generalized theory of multilayer plates // Int. J. Solids and Struct. – 2002. – 39. № 4. – P. 819-839. – Англ.
- [415] Warburton G. B. Vibrations of thin cylindrical shells // J. Mech. Eng. Sci – 1965. – Vol. 7. № 4. – P. 399-407.
- [416] Weingarten V. I. Free vibrations of multilayered cylindrical shells // Experimental Mech. – 1964. – Vol. 4. № 7. – P. 200-205.
- [417] Zhou D., Cheung Y. K., Kong J. Free vibration of thick, layered rectangular plates with point supports by finite layer method // Int. J. Solids and Struct. – 2000. – 37. № 10. – P. 1483-1499. – Англ.